第一章　事件与概率

1、若 A，B，C 是随机事件，说明下列关系式的概率意义：(1) $ABC=A$；(2) $A\cup B\cup C=A$；(3) $AB\subset C$；(4) $A\subset\overline{BC}$.

2、试把 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示成 n 个两两互不相容事件的和.

3、若 A，B，C，D 是四个事件，试用这四个事件表示下列各事件：（1）这四个事件至少发生一个；（2）这四个事件恰好发生两个；（3）A，B 都发生而 C，D 都不发生；（4）这四个事件都不发生；（5）这四个事件中至多发生一个。

4、证明下列等式：（1）$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$；

（2）$C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$；

（3）$\sum_{k=0}^{a-r}C_a^{k+r}C_b^k=C_{a+b}^{a-r}$.

5、袋中有白球 5 只，黑球 6 只，陆续取出三球，求顺序为黑白黑的概率。

6、一部五本头的文集，按任意次序放书架上去，试求下列概率：（1）第一卷出现在旁边；（2）第一卷及第五卷出现在旁边；（3）第一卷或第五卷出现在旁边；（4）第一卷及第五卷都不出现在旁边；（5）第三卷正好在正中。

7、把戏，2，3，4，5 诸数各写在一小纸片上，任取其三而排成自左向右的次序，求所得数是偶数的概率。

8、在一个装有 n 只白球，n 只黑球，n 只红球的袋中，任取 m 只球，求其中白、黑、红球分别有 $m_1,m_2,m_3(m_1+m_2+m_3=m)$ 只的概率。

9、甲袋中有 3 只白球，7 办红球，15 只黑球，乙袋中有 10 只白球，6 只红球，9 只黑球。现从两袋中各取一球，求两球颜色相同的概率。

10、由盛有号码$1,2,\cdots$，N 的球的箱子中有放回地摸了 n 次球，依次记下其号码，试求这些号码按严格上升次序排列的概率。

11、任意从数列$1,2,\cdots$，N 中不放回地取出 n 个数并按大小排列成：$x_1<x_2<\cdots<x_m<\cdots<x_n$，试求 $x_m=M$ 的概率，这里$1\le M\le N$。

12、从 6 只不同的手套中任取 4 只，问其中恰有一双配对的概率是多少？

13、从 n 双不同的鞋子中任取 2r(2r<n)只，求下列事件发生的概率：（1）没有成对的鞋子；（2）只有一对鞋子；（3）恰有两对鞋子；（4）有 r 对鞋子。

14、袋中有 n 只球，记有号码$1,2,\cdots,n$，求下列事件的概率：（1）任意取出两球，号码为 1,2;（2）任意取出 3 球，没有号码 1;（30 任意取出 5 球，号码 1,2,3,中至少出现一个。

15、袋中装有$1,2,\cdots,N$号的球各一只，采用（1）有放回；（1）不放回方式摸球，试求在第 k 次摸球时首次摸到 1 号球的概率。

16、甲有 n+1 个硬币，乙有 n 个硬币，双方投掷之后进行比较，求早掷出的正面比乙掷出的正面多的概率。

17、一颗骰子投 4 次至少得到一个六点，与两颗骰子投 24 次至少得到一个双六这两件事，哪一个有更多的机会遇到?

18、从 52 张扑克牌中任意抽取 13 张来，问有 5 张黑桃，3 张红心，3 张方块，2 张草花的概率。

19、桥牌游戏中（四人各从 52 张纸牌中分得 13 张），求 4 张 A 集中在一个人手中的概率。

20、在扑克牌游戏中（从 52 张牌中任取 5 张），求下列事件的概率：（1）以 A 打头的同花顺次五张牌；（2）其它同花是非曲直次五比重牌；（3）有四张牌同点数；（4）三张同点数且另两张也同点数；（5）五张同花；（6）异花顺次五张牌；（7）三张同点数；（8）五比重中有两对；（9）五张中有一对；（10）其它情况。

21、某码头只能容纳一只船，现预知某日将独立来到两只船，且在 24 小时内各时刻来到有可能性都相等，如果它们需要停靠的时间分别为 3 小时及 4 小时，试求有一船要在江中等待的概率。

22、两人约定于 7 点到 8 点在某地会面，试求一人要等另一人半小时以上的概率。

23、设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是随机事件，试用归纳法证明下列公式：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{n\geq j>i\geq 1}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)。$$

24、考试时共有 N 张考签，n 个学生参加考试$(n\geq N)$，被抽过的考签立刻放回，求在考试结束后，至少有一张考签没有被抽过的概率。

25、甲，乙丙三人按下面规则进行比赛，第一局由甲，乙参加而丙轮空，由第一局的优胜者与丙进行第二局比赛，而失败者则轮空，比赛用这种方式一直进行到其中一个人连胜两局为止，连胜两局者成为整场比赛的优胜者。若甲，乙，丙胜每局的概率各为 1/2，问甲，乙，丙成为整场比赛优胜者的概率各是多少?

26、给定$p=P(A),q=P(B),r=P(A\cup B)$，求$P(AB)$及$P(\overline{A}\,\overline{B})$。

27、已知：$P(AB)=P(A)P(B),C\supset AB,\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$，证明：$P(AC)\geq P(A)P(C)$。

28、（1）已知A_1与A_2同时发生则 A 发生，试证：$P(A)\geq P(A_1)+P(A_2)-1$

（2）若$A_1A_2A_3\quad A$，试证：$P(A)\geq\ P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$

29、利用概率论的想法证明下列恒等式：

$$1+\frac{A-a}{A-1}+\frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)}+\cdots+\frac{(A-a)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)\cdots(a+1)a}=\frac{A}{a}$$

其中 A，a 都是正整数，且 $A>a$。

30、证明 Ω 的一切子集组成的集类是一个 $\sigma-$ 域。

31、证明：$\sigma-$ 域之交仍为 $\sigma-$ 域。

32、 向边长为 a 的正方形由任意投一点，求此点正好落在对正方形对角形上的概率?

33、在 10 只电子表中有 2 只是次品，现从中不放回的连续抽取两次，每次抽取一只，求正好抽到一个是正品，一个是次品的概率?

34、在 5 双不同的鞋中任取 4 双，求至少能配成一双的概率?

35、在整数 0 至 9 中任取 4 个，能排成一个四位偶数的概率是多少?

36、两人相约于 7 点到 8 点间在某地相会，约定先到者等候另一人 20 分钟,过时离去，试求这两人能会面的概率是多少?

37、有 10 个电阻，其电阻值分别为 $1\Omega, 2\Omega, \cdots, 10\Omega$ ，从中取出三个，要求取出的三个电阻，一个小于 5Ω，一个大于 5Ω，另一个等于 5Ω，问取一次就能达到要求的概率。

38、两船欲靠同一码头，设两船独立地到达，而且各自到达时间在一昼夜间是可能的，如果此两船在码头停留的时间分别是 1 及 2 小时，试求一船要等待空出码头的概率。

39、任意取两个正的真分数，求它们的乘积不大于 1/4 的概率。

40、在区间 $(0,1)$ 中随机取两数，求两数之和小于 1.2 的概率。

41、设 3 个事件 A，B，C，满足 $AB=\phi$，求 $P(A\cup B\cup C)$。

42、某城市中发行 2 种报纸 A，B。经调查，在这 2 种报纸的订户中，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，同时订阅 2 种报纸 A，B 的有 10%。求：（1）只订 A 报的概率；（2）只订 1 种报纸的概率。

43、从 $1,2,3,4,5$ 五个数码中，任取 3 个不同数码排成三位数，求：（1）所得三位数为偶数的概率；（2）所得三位数为奇数的概率。

44、电话号码由 6 个数字组成，每个数字可以是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的任一个数（但第 1 个数字不能为 0），求电话号码由完全不相同的数字组成的概率。

45、袋中有 5 个白球和 3 个黑球。从中任取 2 个球，求：（1）取得的 2 个球同色的概率；（2）取得的 2 个球至少有 1 个是白球的概率。

46、证明： $P(AB)+P(AC)-P(BC)\ \le P(A)$

47、证明：包含一切形如 $(-\infty, x)$ 的区间的最小 $\sigma-$ 域是一维波雷尔 $\sigma-$ 域。

第一章 解答

1、解：（1）ABC$=A\Rightarrow BC\supset A(ABC\subset A$显然$)\Rightarrow B\supset A$且$C\supset A$，若 A 发生，则 B 与 C 必同时发生。

（2）$A\cup B\cup C=A\Rightarrow B\cup C\subset A\Rightarrow B\subset A$且C$\subset$A，B 发生或 C 发生，均导致 A 发生。

（3）$AB\subset C\Rightarrow A$与 B 同时发生必导致 C 发生。

（4）$A\subset \overline{BC}\Rightarrow A\subset \overline{B}\cup\overline{C}$，A 发生，则 B 与 C 至少有一不发生。

2、解：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1+(A_2-A_1)+\cdots+(A_n-A_1-\cdots-A_{n-1})$

$$(\text{或})=A_1+A_2\overline{A_1}+\cdots+A_n\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}.$$

3、解：（1）{至少发生一个}$=A\cup B\cup C\cup D$.

（2）{恰发生两个}$=AB\overline{C}\overline{D}+AC\overline{B}\overline{D}+AD\overline{B}\overline{C}+BC\overline{A}\overline{D}+CD\overline{A}\overline{B}+BD\overline{A}\overline{C}$.

（3）{A，B 都发生而 C，D 都不发生}$=AB\overline{C}\overline{D}$.

（4）{都不发生}$=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}=\overline{A\cup B\cup C\cup D}$.

（5）{至多发生一个}$=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+B\overline{A}\overline{C}\overline{D}+C\overline{A}\overline{B}\overline{D}+D\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

$$=\overline{AB\cup AC\cup AD\cup BC\cup BD\cup CD}.$$

4、解：（1）因为$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+nC_n^nx^n$，两边对 x 求导得

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$，在其中令 x=1 即得所欲证。

（2）在上式中令 x=-1 即得所欲证。

（3）要原式有意义，必须$0\le r\le a$。由于$C_{a+b}^{a-r}=C_{a+b}^{b+r}$，$C_b^k=C_b^{b-k}$，此题即等于要证

$\sum_{k=0}^{a}C_a^{k+r}C_b^{b-k}=C_{a+b}^{b+r}$，$0\le r\le a$.利用幂级数乘法可证明此式。因为

$(x+1)^a(x+1)^b=(x+1)^{a+b}$，比较等式两边$x^{b+r}$的系数即得证。

5、解：$P=A_6^1A_5^1A_5^1/A_{11}^3=\dfrac{5}{33}=0.15$

6、解：（1）第一卷出现在旁边，可能出现在左边或右边，剩下四卷可在剩下四个位置上任意排，所以

$p=2\times 4!/5!=2/5$

（2）可能有第一卷出现在左边而第五卷出现右边，或者第一卷出现在右边而第五卷出现在左边，剩下三卷可在中间三人上位置上任意排，所以 $p=2\times 3!/5!=1/10$

（3）$p=P${第一卷出现在旁边}+P{第五卷出现旁边}-P{第一卷及第五卷出现在旁边}=$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$.

（4）这里事件是（3）中事件的对立事件，所以 $P=1-7/10=3/10$

（5）第三卷居中，其余四卷在剩下四个位置上可任意排，所以 $P=1\times 4!/5!=1/5$

7、解：末位数吸可能是 2 或 4。当末位数是 2（或 4）时，前两位数字从剩下四个数字中选排，所以 $P=2\times A_4^2/A_5^3=2/5$

8、解：$P=C_n^{m_1}C_n^{m_2}C_n^{m_3}/3C_{3n}^m$

9、解：P{两球颜色相同}=P{两球均白}+P{两球均黑}+P{两球均红}

$$=\frac{3}{25}\times\frac{10}{25}+\frac{7}{25}\times\frac{6}{25}+\frac{15}{25}\times\frac{9}{25}=\frac{207}{625}=0.33.$$

10、解：若取出的号码是按严格上升次序排列，则 n 个号码必然全不相同，$n\le N$。N 个不同号码可产生 $n!$ 种不同的排列，其中只有一个是按严格上升次序的排列，也就是说，一种组合对应一种严格上升排列，所以共有 C_N^n 种按严格上升次序的排列。总可能场合数为 N^n，故题中欲求的概率为 $P=C_N^n/N^n$.

11、解：因为不放回，所以 n 个数不重复。从 $\{1,2,\cdots,M-1\}$ 中取出 m-1 个数，从 $\{M+1,\cdots N\}$ 中取出 $n-m$ 个数，数 M 一定取出，把这 n 个数按大小次序重新排列，则必有 $x_m=M$。故 $P=C_{M-1}^{m-1}C_1^1C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$。当 $M-1<m-1$ 或 $N-M<n-m$ 时，概率 $P=0$.

12、解：有利场合是，先从 6 双中取出一双，其两只全取出；再从剩下的 5 双中取出两双，从其每双中取出一只。所以欲求的概率为 $P=C_6^1C_2^2C_5^2C_2^1C_2^1/C_{12}^4=\frac{16}{33}=0.48$

13、解：（1）有利场合是，先从 n 双中取出 2r 双，再从每双中取出一只。

$$P=C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}/C_{2n}^{2r},\quad (2r<n)$$

（2）有利场合是，先从 n 双中取出一双，其两只全取出，再从剩下的 $n-1$ 双中取出 $2r-2$ 双，从鞭每双中取出一只。

$$P=C_n^1C_2^2C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}/C_{2n}^{2r}=n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}/C_{2n}^{2r}.$$

（3） $P=2^{2r-4}C_n^2C_{n-2}^{2r-4}/C_{2n}^{2r}$.

（4） $P=C_n^r(C_2^2)^r/C_{2n}^{2r}=C_n^r/C_{2n}^{2r}$.

14、解:（1）P{任意取出两球，号码为 1，2}=$1/C_n^2$.

（2）任取 3 个球无号码 1，有利场合是从除去 1 号球外的 $n-1$ 个球中任取 3 个球的组合数，故 P{任取 3 球，无号码 1}$=C_{n-1}^3/C_n^3$.

（3）P{任取 5 球，号码 1,2,3 中至少出现 1 个}$=1-P${任取 5 球，号码 1,2,3 不出现}$=1-C_{n-3}^5/C_n^5$.

其中任取 5 球无号码 1,2,3，有利场合是从除去 1,2,3 号球外的 $n-3$ 个球中任取 5 个球的组合数。

15、解：（1）有利场合是，前 $k-1$ 次从 $N-1$ 个号中（除 1 号外）抽了，第 k 次取到 1 号球，

$$P=(N-1)^{k-1}\cdot 1/N^k=(N-1)^{k-1}/N^k$$

（2）考虑前 k 次摸球的情况， $P=A_{N-1}^{k-1}\cdot 1/A_N^k=1/N$。

16、解法一：设 A={甲掷出正面数>乙掷出正面数}，B={甲掷出反面数>乙掷出反面数}。考虑 $\overline{A}$={={甲掷出正面数≤乙掷出正面数}。设 $\overline{A}$ 发生。若乙掷出 n 次正面，则甲至多掷出 n 次正面，也就是说乙掷出 0 次反面，甲至少掷出 1 次反面，从而甲掷出反面数>乙掷出反面数。若乙掷出 $n-1$ 次正面，则甲至多掷出 $n-1$ 次正面，也就是说乙掷出 1 次反面，甲至少掷出 2 次反面，从而也有甲掷出反面数>乙掷出反面数，等等。由此可得

$$\overline{A}=\{\text{甲掷出正面数}\le\text{乙掷出正面数}\}=\{\text{甲掷出反面数}\le\text{乙掷出反面数}\}=B.$$

$$\therefore P(A)+P(B)=P(A)+P(A)=1$$

显然 A 与 B 是等可能的，因为每人各自掷出正面与反面的可能性相同，所以 $P(A)=P(B)$，从而 $P(A)=\dfrac{1}{2}$。

解法二：甲掷出 $n+1$ 个硬币共有 2^{n+1} 个等可能场合，其中有 C_{n+1}^0 个出现 0 次正面，有 C_{n+1}^1 个出现1 次正面，…， C_{n+1}^{n+1} 个出现 $n+1$ 次正面。乙掷 n 个硬币共有 2^n 个等可能场合，其中有 C_n^0 个出现 0 次正面，C_n^1 个出现 1 次正面，…， C_n^n 个出现 n 次正面。若甲掷 $n+1$ 个硬币，乙掷 n 个硬币，则共有 $n_1=2^{n+1}\cdot 2^n=2^{2n+1}$ 种等可能场合，其中甲掷出正面比乙掷出正面多的有利场合数有

$$m_1 = C_{n+1}^1 C_n^0 + C_{n+1}^2(C_n^0 + C_n^1) + C_{n+1}^3(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2) + \cdots$$

$$= C_{n+1}^n(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1}) + C_{n+1}^{n+1}(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n)$$

利用公式 $C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}$ 及 $C_{n+1}^{n+1} = C_n^n$ 得

$$m_1 = (C_n^0 + C_n^1)C_n^0 + (C_n^1 + C_n^2)(C_n^0 + C_n^1) + (C_n^2 + C_n^3)(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2) + \cdots +$$

$$(C_n^{n-1} + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1}) + C_n^n(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n)$$

$$= \left[(C_n^0)^2 + C^1 C_n^0\right] + \left[(C_n^1)^2 + C^1 C_n^0 + C_n^2 \sum_{i<2} C_n^i\right] + \left[(C_n^2)^2 + C_n^1 C_n^0 + C_n^2 \sum_{i<3} C_n^i\right] +$$

$$+ \cdots + \left[(C_n^{n-1})^2 + C_n^{n-1} \sum_{1<n-1} C_n^i + C_n^n \sum_{i<n} C_n^i\right] + \left[(C_n^n)^2 + C_n^n \sum_{i<n} C_n^i\right] +$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 + 2 \sum_{n \ge j > i \ge 0} C_n^i C_n^j = \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i\right)^2$$

所以欲求的概率为 $P = m_1 / n_1 = 2^{2n} / 2^{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

应注意，甲掷出 $0,1,\cdots,n+1$ 个正面的 $n+2$ 个场合不是等可能的。

17、解：事件“一颗投 4 次至少得到一个六点”的对立事件为“一颗投 4 次没有一个六点”，后者有有利场合为，除去六点外的剩下五个点允许重复地排在四个位置上和排列数，故，

P{一颗投 4 次至少得到一个六点}=1－{一颗投 4 次没有一个六点}$=1-5^4/6^4 = 0.5177$.

投两颗骰子共有 36 种可能结果，除双六（6，6）点外，还有 35 种结果，故

P{两颗投 24 次至少得到一个双六}=1－{两颗投 24 次没有一个双六}$=1-35^{24}/36^{24} = 0.4914$.

比较知，前者机会较大。

18、解：$P = C_{13}^5 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^2 / C_{52}^{13} = 0.0129$

19、解：$P = \dfrac{C_4^1 C_4^4 C_{43}^9 C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}}{C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}} = \dfrac{4 \times C_{43}^9}{C_{52}^{13}} = 0.0106$.

或解为，4 张 A 集中在特定一个手中的概率为 $C_4^4 C_{48}^9 / C_{52}^{13}$，所以 4 张 A 集中在一个人手中的概率为 $P = 4 \times C_{48}^9 / C_{52}^{13} = 0.0106$.

20、解:（1）$P = 4 / C_{52}^5 = 0.0000015$. 这里设 A 只打大头，若认为可打两头 AKQJ10 及 A2345，则答案有变，下同。

（2）取出的一张可民由 K，Q，…，6 八个数中之一打头，所以

$$P=C_4^1C_8^1\ /\ C_{52}^5=0.0000123\ .$$

（3）取出的四张同点牌为 13 个点中的某一点，再从剩下 48 张牌中取出 1 张，所以 $P=C_{13}^1C_4^4\ /\ C_{52}^5=0.00024.$

（4）取出的 3 张同点占有 13 个点中一个点，接着取出的两张同点占有其余 12 个点中的一个点，所以 $P=C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2\ /\ C_{52}^5=0.00144.$

(5)5 张同花可以是四种花中任一种，在同一种花中，5 张牌占有 13 个点中 5 个点，所以 $P=C_4^1C_{13}^5\ /\ C_{52}^5=0.00198.$

(6){异花顺次五张牌}={顺次五张牌}－{同花顺次五张牌}。顺次五张牌分别以 A，K，…，6 九个数中之一打头，每张可以有四种不同的花；而同花顺次中花色只能是四种花中一种。所以

p ＝ P{顺次五张牌}－{同花顺次五张牌} $=\left[C_9^1(C_4^1)^5-C_4^1C_9^1\right]\ /\ C_{52}^5=0.0000294.$

（7）三张同点牌占有 13 个点中一个占有剩下 12 个点中两个点，所以 $P=C_{13}^1C_4^3C_{12}^2(C_4^1)^2\ /\ C_{52}^5=0.0211.$

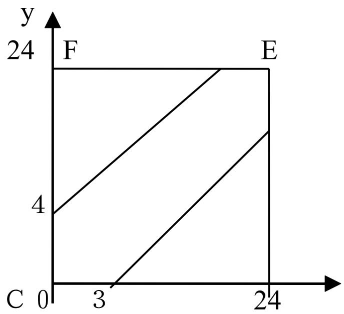
（8）P{五张中有两对}=P{五张中两对不同点}+P{五张中两对同点}

$$=C_{12}^2C_4^2C_4^2C_{11}^1C_4^1\ /\ C_{52}^5+C_{13}^1C_4^4C_{12}^1C_4^1\ /\ C_{52}^5=0.0475.$$

（9）$p=C_{13}^1C_4^2C_{12}^3(C_4^1)^3\ /\ C_{52}^5=0.423.$

（10）若记（i）事件为 A_i，则 $A_1\subset A_5, A_2\subset A_5, A_3\subset A_8, A_4\subset A_9$ 而事件 $A_5,\cdots,A_9$ 两两不相容，所以 $p=1-P\left(\bigcup_{i=5}^{9}A_i\right)=1-\sum_{i=5}^{9}P(A_i)=0.506.$

21、解： 设 x，y 分别为此二船到达码头的时间，则 $0\le x\le 24,\ 0\le y\le 24.$ 两船到达码头的时间与由上述条件决定的正方形内的点是一一对应的（如图）



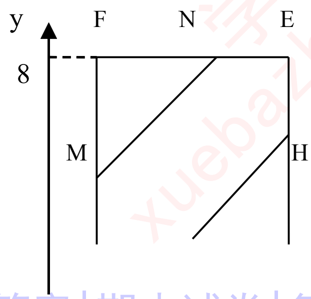
设 A 表事件“一船要等待空出码头”，则 A 发生意味着同时满足下列两不等式

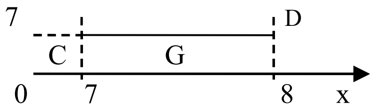
$$x-y\le 3\ ,\ y-x\le 4$$

由几何概率得，事件 A 的概率，等于正方形 C D E F 中直线 $x-y\le 3$ 及 $y-x\le 4$ 之间的部分面积，与正方形 CDEF 的面积之比，即

$$PA=\left[24^2-\left(\frac{1}{2}\times 20^2+\frac{1}{2}\times 21^2\right)\right]/24^2=311/1152=0.27$$

22、解： 设 x，y 分别为此二人到达时间，则 $7\le x\le 8, 7\le y\le 8$。显然，此二人到达时间 (x,y) 与由上述条件决定的正方形 CDEF 内和





点是一一对应的(如图)。
设 A 表事件“其中一人必须等另外一人的时间 1/2 小时以上“，则 A 发生意味着满足如下不等式 $x-y>\dfrac{1}{2}$ 或 $y-x>\dfrac{1}{2}$。由几何概率得，事件 A 的概率等于ΔGDH 及ΔFMN 的面积之和与正方形 CDEF 的面积之比，所以

$$P(A)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})/(1\times 1)=\frac{1}{4}$$

23、证：当 $n=2$ 时，$A_1\cup A_2=A_1\cup(A_2-A_1A_2)$，$A_1$ 与 $A_2-A_1A_2$ 两者不相容，所以

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_2-A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

此即当 $n=2$ 时原式成立。

设对 $n-1$ 原式成立，现证对 n 原式也成立。

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)=P\{A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n\}$$

$$=P(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})+P(A_n)-P\{A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n\}$$

$$=P(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})+P(A_n)-P\{A_1A_n\cup A_2A_n\cup\cdots\cup A_{n-1}A_n\}$$

对前后两项分别应用归纳假设得

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)=\left\{\sum_{n=1}^{n-1}P(A_i)-\sum_{n-1\ge j>i\ge 1}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-2}P(A_1\cdots A_{n-1})\right\}+P(A_n)$$

$$-\left\{\sum_{i=1}^{n-1}P(A_iA_n)-\sum_{n-1\ge j>i\ge 1}P(A_iA_nA_jA_n)+\cdots+(-1)^{n-2}P(A_iA_nA_jA_n\cdots A_{n-1}A_n)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{n\ge j>i\ge 1}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

至此，原式得证。

24、解：设考签编号为$1,2,\cdots,N$，记事件 $A_i=\{第x号考签未被抽到\}$，则

$$P(A_i)=(N-1)^n/N^n,\qquad P(A_iA_j)=(N-2)^n/N^n(i\ne j),\cdots\cdots,$$

$$P(A_1A_2\cdots A_N)=(N-N)^n/N^n=0;$$

诸 A_i 相容，利用第 33 题公式计算得

$$P=\{至少有一张考签未被抽到\}=P\{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N\}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{N\ge j>i\ge 1}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)$$

$$= C_N^1 \frac{(N-1)^n}{N^n} - C_N^2 \frac{(n-2)^n}{N^n} + \cdots + (-1)^{N-2} C_N^{N-1} \frac{1}{N^n} + 0$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i-1} C_N^1 \frac{(N-i)^n}{N^n}.$$

25、解： 这些比赛的可能结果，可以用下面方法表示：

$$aa, acc, acbb, acbaa, acbacc, acbacbb, \cdots$$
$$bb, bcc, bcaa, bcabb, bcabcc, bcabcaa, \cdots$$

其中 a 表甲胜，b 表乙胜，c 表丙胜。

在这些结果中，恰巧包含 k 个字母的事件发生的概率应为 $\frac{1}{2^k}$，如 aa 发生的概率为 1/4，acbb 发生的概率为 1/16 等等。则

$$p(c) = [P(acc) + P(bcc)] + [P(acbacc) + P(bcabcc)] + \cdots = 2 \times \frac{1}{2^3} + 2 \times \frac{1}{2^6} + 2 \times \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{2}{7}.$$

由于甲，乙两人所处的地位是对称的，所以 $p(a) = p(b)$，得

$$p(a) = p(b) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{7}) = \frac{5}{14}.$$

26、解： $P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A \cup B - B) = P(A \cup B) - P(B) = r - q$

$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - r$.

27、证： 设 $BC = C_1, C(A-B) = C_2$. 由 $\overline{C} \supset \overline{A}\overline{B}$ 可得，$C \subset A \cup B$，

$$\therefore C = C_1 \cup C_2，\quad C_1 \cap C_2 = \phi \qquad (1)$$

又 $C \supset AB$ $\therefore AC_1 = A(BC) = AB$ 　　再由 $P(B) \geq P(C_1)$ 得

$$P(AC_1) = P(AB) = P(A)P(B) \geq P(A)P(C_1) \qquad (2)$$

由 $C_2 \subset A$ 并利用 $P(A) \leq 1$ 得

$$P(AC_2) = P(C_2) \geq P(A)P(C_2) \qquad (3)$$

由（1)，(2)，(3）可得

$$P(AC) = P\{A(C_1 \cup C_2)\} = P(AC_1 \cup AC_2) = P(AC_1) + P(AC_2) \geq P(A)P(C_1) + P(A)P(C_2)$$

$$= P(A)[P(C_1) + P(C_2)] = P(A)P(C)$$

28、证：（1） $A \supset A_1A_2$，由单调性及 $P(A_1 \cup A_2) \leq 1$ 得

$$P(A) \ge P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \ge P(A_1) + P(A_2) - 1.$$

（2） $A \supset A_1A_2A_3$，两次利用（1）的结果得

$$P(A) \ge P((A_1A_2)A_3) \ge P(A_3) + P(A_1A_2) - 1$$

$$\ge P(A_3) - 1 + P(A_1) + P(A_2) - 1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$$

29、证：设袋中有 A 个球，其中 a 个是白球，不还原随机取出，第 k 次才首次取得白球的概率为

$$P_k = \frac{A_{A-a}^{k-1}A_a^1}{A_A^k} = \frac{a(A-a)(A-a-1)\cdots(A-a-k+2)}{A(A-1)(A-2)\cdots(A-k+1)} \qquad (k = 1,2,\cdots,A-a+1).$$

因为袋中有 a 个白球，$A-a$ 个黑球，若一开始总是取到黑球，直到把黑球取完为止，则至迟到第 $A-a+1$ 次一定会取到白球；也就是说，第一次或第二次…或至迟到第 $A-a+1$ 次取得白球事件是必然事件，其概率为 1。所以

$$1 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{A-a+1} = \frac{a}{A} + \frac{a(A-a)}{A(A-1)} + \cdots + \frac{a(A-a)\cdots 2\cdot 1}{A(A-1)\cdots(a+1)a}$$

等式两边同乘以 $\frac{A}{a}$ 得

$$1 + \frac{A-a}{A-1} + \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \cdots + \frac{(A-a)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)\cdots(a+1)a} = \frac{A}{a}.$$

30、证：记 F={Ω 的一切子集}

（i） Ω 是 Ω 的子集，所以 $\Omega \in F$。

(ii) 若 $A \in F$，则 A 是 Ω 的子集，$\Omega - A$ 也是 Ω 的子集，所以 $A = \Omega - A \in F$。

(iii) $A_i(i=1,2,\cdots) \in F$，当然有 $\Omega \supset A_i, i=1,2,\cdots$。任一 $\omega \in \bigcup_i A_i$。必有某一 A_i，使 $\omega \in A_i$，所以 $\omega \in \Omega$，从而 $\Omega \supset \bigcup_i iA_i$，即 $\bigcup_i iA_i$ 也是 Ω 的一个子集，故 $\bigcup_i iA_i \in F$。

∴F 是 $\sigma-$域。

31、证：设 $F_t(t \in T)$ 是 $\sigma-$域，记 $F = \bigcup_{t\in T} F_t$.

(i) $\Omega \in$ 每一 F_t，所以 $\Omega \in \bigcap_{t\in T} F_t$，即 $\Omega \in F$.

(ii) $A \in F$，则 $A \in$ 每一 F_t，由 F_t 是 $\sigma-$域得 $\overline{A} \in$ 每一 F_t，所以 $\overline{A} \in \bigcup_{t\in T} F_t$，从而 $\overline{A} \in F$.

(iii) $A_i(i=1,2,\cdots) \in F$，则诸 A_t 必属于每一 F_t，由于 F_t 是 $\sigma-$域，所以 $\bigcup_i A_i \in$ 每一 F_t，即 $\bigcup_i A_i \in \bigcap_{t\in T} F_t = F$.

$\therefore f$ 是 $\sigma-$域。

32、解： 由于点落入正方形是等可能的，此属几何概型$S_\Omega = a^2$,事件 A={点落于两条对角线上了的测度 $S_A=0$，故 P(A)=$\dfrac{S_A}{S_\Omega}=0$

33、解： 由于此时样本点总数是 90 ,有利场合数是 32 ∴所求概率 $P=\dfrac{16}{45}$

34、解： 记 $A=\{$选取的样品至少配成一双$\}$，由于样品总数是C_{10}^4

$\overline{A}$的有利场合数是 $C_5^4C_2^1C_8^1$ $\therefore p(A)=1-P(\overline{A})$ $\qquad P(A)=1-\dfrac{8}{21}=\dfrac{13}{21}\approx 0.619$

35、解： 从 0 至 9 中任取 4 个数进行排列共有 10×9×8×7 种排法.
其中有（4×9×8×7－4×8×7＋9×8×7）种能成 4 位偶数.

故所求概率 $P=\dfrac{4\times9\times8\times7-4\times8\times7+9\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{41}{90}$

36、解： 以 X,Y 分别表示两人到达的时刻,

则 (X,Y) 可能取值范围是$G=\{(X,Y):0\le X\le 60,0\le Y\le 60\}$

则两人能会面的范围 $g=\{(X,Y):|X-Y|\le 20, X\ge 0, Y\ge 0\}$

故能会面的概率 P=$\dfrac{g\text{的面积}}{G\text{的面积}}=\dfrac{60^2-40^2}{60^2}=\dfrac{5}{9}$

37、解： 从 10 个电阻中取三个电阻的取法有$\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$种取法

满足要求的取法有 $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$种取法， 故所求概率 $P=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}/\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{6}$

38、解： 设 二船到达的时刻为x,y，则 x,y一切可能取值

$G=\{(x,y):0\le x\le 24;0\le y\le 24\}$ (得 2 分)

所求值：$g=\{(x,y)\in G, y-x\le 1, x-y\le 2$

所求概率 p=$\dfrac{g\text{的面积}}{G\text{的面积}}=0.121$

39、解：设 x 及 y 为所取的正的真分数，则 $\Omega=\{(x,y);0<x<1,0<y<1\}$；

$A=\left\{(x,y);xy\le\frac{1}{4},0<x<1,0<y<1\right\}$，故 $P(A)=\dfrac{\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4=0.597$

40、解：设此二数为 x,y，则 $\Omega=\{(x,y);0<x<1,0<y<1\}$

$A=\{(x,y):x+y<1.2,\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$

故 $P(A)=\dfrac{1-\frac{1}{2}\cdot 0.8\cdot 0.8}{1}=0.68$

在区间 $(0,1)$ 中随机取两数，求两数之和小于 1.2 的概率。

41、解：$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(\phi)-P(AC)-P(BC)+P(\phi)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(BC)$

42、解：（1）记事件 A={订阅 A 报}， B={订阅 B 报}，则{只订阅 A 报}可表示为 $A-B=A-AB$。因 $AB\subset A$，故 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.45-0.1=0.35$。

（2）{只订 1 种报}=$(A-B)\cup(B-A)=A\bar{B}\cup B\bar{A}$，要把 $A-B,B-A$ 分别表示为 $A-AB$，$B-AB$。又这 2 个事件是互不相容的，由概率加法公式，有

$$p=P(A-AB)+P(B-AB)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$$
$$=0.45-0.1+0.35-0.1=0.6$$

43、解：（1）三位数总的排法是 A_5^3 种。排得偶数要求末位数是偶数，即 2 或 4，余下的 4 个数任取 2 个排列。因此，排得偶数的情况种数是 $2A_4^2$ 种，故 $p_1=\dfrac{2A_4^2}{A_5^3}=\dfrac{2\times4\times3}{5\times4\times3}=0.4$。

（2）同（1）作类似的分析，知 $p_2=\dfrac{3A_4^2}{A_5^3}=\dfrac{3\times4\times3}{5\times4\times3}=0.6$。

注：此题也可以这样分析：{所得三位数是偶数}={三位数末位数是偶数}，又{所得三位数是奇数}={三位数末位数是奇数}。从而 $p_1=\frac{2}{5}=0.4,\quad p_2=\frac{3}{5}=0.6$

44、解：因第 1 个数字不能为 0，故 6 位电话号码的数字情况总数 $N=9\times10^5$ 个，其中完全由不同数字

组成的情况数为 $M=9\times9\times8\times7\times6\times5=136080$（个）。所以 $p=\frac{136080}{900000}=0.1512$。

45、解：（1）从 8 个球中任取 2 个的取法总数为 $C_8^2=28$ 种。取得的 2 个球为同色，分为两种情况：2 个球皆为白色或 2 个球皆为黑色。这两种情况各有 C_5^2,C_3^2 种，故取得 2 个球同色的情况数为 $C_5^2+C_3^2=13$ 种，所以 $p_1\approx\frac{13}{28}\approx0.4643$。

此题也可以这样解：A_1={取得的 2 个球皆为白色}，A_2={取得的 2 个球皆为黑色}，A={取得的 2 个同色}。A_1,A_2 互不相容，且 $A=A_1\cup A_2$，而 $P(A_1)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}$，$P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$，故

$$p_1=P(A)=\frac{10}{28}+\frac{3}{28}+\frac{13}{28}\approx0.4643$$

（2）令 A={取得的 2 个球至少有 1 个白球}，则 $\overline{A}$={取得的 2 个球皆为黑球}，故

$$p_2=P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_3^2}{C_8^2}=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}\approx0.8929$$

46、证：$P(AB)+P(AC)-P(BC)=p(AB\cup AC)+P(ABC)-P(BC)$

$$\le P(A)+P(BC)-P(BC)=P(A)$$

47、证：一维波雷尔 $\sigma-$域 $B=m\{[a,b)\}$ 是由左闭右开区间灶产生的 $\sigma-$域，$\widetilde{B}=M\{(-\infty,x)\}$ 是由形如 $(-\infty,x)$ 区间类产生的 $\sigma-$域。

因为 $[a,b)=(-\infty,b)-(-\infty,a)$

等式左边是 $\widetilde{B}$ 中两个集的差，由此知 $\widetilde{B}$ 包含一切形如 $[a,b)$ 的集，而 B 是由一切形如 $[a,b)$ 的集类产生的 $\sigma-$域，所以 $\widetilde{B}\supset B$。

又由于 $(-\infty,x)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[x-n,x-n+1)$，

等式右边是 B 中集的可列并，由此知 B 包含一切形如 $(-\infty,x)$ 的集，与上段同理得 $B\supset\widetilde{B}$.

$\therefore\ \widetilde{B}=B$.

第二章　　条件概率与统计独立性

1、字母 M，A，X，A，M 分别写在一张卡片上，充分混合后重新排列，问正好得到顺序 MAAM 的概率是多少？

2、有三个孩子的家庭中，已知有一个是女孩，求至少有一个男孩的概率。

3、若 M 件产品中包含 m 件废品，今在其中任取两件，求：（1）已知取出的两件中有一件是废品的条件下，另一件也是废品的条件概率；（2）已知两件中有一件不是废品的条件下，另一件是废品的条件概率；（3）取出的两件中至少有一件是废品的概率。

4、袋中有 a 只黑球，b 吸白球，甲乙丙三人依次从袋中取出一球（取后来放回），试分别求出三人各自取得白球的概率（$b \geq 3$）。

5、从{0，1，2，…，9}中随机地取出两个数字，求其和大于 10 的概率。

6、甲袋中有 a 只白球，b 只黑球，乙袋中有α吸白球，β吸黑球，某人从甲袋中任出两球投入乙袋，然后在乙袋中任取两球，问最后取出的两球全为白球的概率是多少？

7、设的 N 个袋子，每个袋子中将有 a 只黑球，b 只白球，从第一袋中取出一球放入第二袋中，然后从第二袋中取出一球放入第三袋中，如此下去，问从最后一个袋子中取出黑球的概率是多少？

8、投硬币 n 回，第一回出正面的概率为 c，第二回后每次出现与前一次相同表面的概率为 p，求第 n 回时出正面的概率，并讨论当$n \to \infty$时的情况。

9、甲乙两袋各将一只白球一只黑球，从两袋中各取出一球相交换放入另一袋中，这样进行了若干次。以 pn，qn，rn 分别记在第 n 次交换后甲袋中将包含两只白球，一只白球一只黑球，两只黑球的概率。试导出 pn+1，qn+1，rn+1 用 pn，qn，rn 表出的关系式，利用它们求 pn+1，qn+1，rn+1，并讨论当$n \to \infty$时的情况。

10、设一个家庭中有 n 个小孩的概率为 $p_n = \begin{cases} ap^n, & n \geq 1, \\ 1 - \dfrac{ap}{1-p}, & n = 0, \end{cases}$

这里$0 < p < 1,\ 0 < a < (1-p)/p$。若认为生一个小孩为男孩可女孩是等可能的，求证一个家庭有$k(k \geq 1)$个男孩的概率为$2ap^k/(2-p)^{k+1}$。

11、在上题假设下：（1）已知家庭中至少有一个男孩，求此家庭至少有两个男孩的概率；

（2）已知家庭中没有女孩，求正好有一个男孩的概率。

12、已知产品中 96%是合格品，现有一种简化的检查方法，它把真正的合格品确认为合格品的概率为 0.98，而误认废品为合格品的概率为 0.05，求在简化方法检查下，合格品的一个产品确实是合格品的概率。

13、设 A，B，C 三事件相互独立，求证$A \cup B, AB, A-B$皆与 C 独立。

14、若 A，B，C 相互独立，则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 亦相互独立。

15、证明：事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立的充要条件是下列 2n 个等式成立：

$$P(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_n)=P(\hat{A}_1)P(\hat{A}_2)\cdots P(\hat{A}_n),$$

其中 $\hat{A}_i$ 取 A_i 或 $\overline{A}_i$。

16、若 A 与 B 独立，证明 $\{\phi,A,\overline{A},\Omega\}$ 中任何一个事件与 $\{\phi,B,\overline{B},\Omega\}$ 中任何一个事件是相互独立的。

17、对同一目标进行三次独立射击，第一，二，三次射击的命中概率分别为 0.4，0.5，0.7，试求（1）在这三次射击中，恰好有一次击中目标的概率；（2）至少有一次命中目标的概率。

18、设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，而 $P(A_k)=p_k$，试求：（1）所有事件全不发生的概率；（2）诸事件中至少发生其一的概率；（3）恰好发生其一的概率。

19、当元件 k 或元件 k_1 或 k_2 都发生故障时电路断开，元件 k 发生故障的概率等于 0.3，而元件 k1，k2 发生故障的概率各为.2，求电路断开的概率。

20、说明“重复独立试验中，小概率事件必然发生”的确切意思。

21、在第一台车床上制造一级品零件的概率等于 0.7，而在第二台车床上制造此种零件的概率等于 0.8，第一台车床制造了两个零件，第二台制造了三个零件，求所有零件均为一级品的概率。

22、掷硬币出现正面的概率为 p，掷了 n 次，求下列概率：（1）至少出现一次正面；（2）至少出现两次正面。

23、甲，乙，丙三人进行某项比赛，设三个胜每局的概率相等，比赛规定先胜三局者为整场比赛的优胜者，若甲胜了第一，三局，乙胜了第二局，问丙成为整场比赛优胜者的概率是多少？

24、甲，乙均有 n 个硬币，全部掷完后分别计算掷出的正面数相等的概率。

25、在贝努里试验中，事件 A 出现的概率为 p，求在 n 次独立试验中事件 A 出现奇数次的概率。

26、在贝努里试验中，若 A 出现的概率为 p，求在出现 m 次 A 之前出现 k 次 A 的概率。

27、甲袋中有 $N-1$ 只白球和一只黑球，乙袋中有 N 只白球，每次从甲，乙两袋中分别取出一只球并交换放入另一袋中去，这样经过了 n 次，问黑球出现在甲袋中的概率是多少？并讨论 $n\to\infty$ 时的情况。

28、某交往式计算机有 20 个终端，这些终端被各单位独立操作，使用率各为 0.7，求有 10 个或更多个终端同时操作的概率。

29、设每次射击打中目标的概率等于 0.001，如果射击 5000 次，试求打中两弹或两弹以上的概率。

30、假定人在一年 365 日中的任一日出生的概率是一样的，在 50 个人的单位中有两面三刀个以上的人生于元旦的概率是多少？

31、一本 500 页的书，共有 500 个错字，每个字等可能地出现在每一页上，试求在给定的一页上至少有

三个错字的概率。

32、某疫苗中所含细菌数服从普阿松分布，每 1 毫升中平均含有一个细菌，把这种疫苗放入 5 只试管中，每试管放 2 毫升，试求：（1）5 只试管中都有细菌的概率；（2）至少有 3 只试管中有细菌的概率。

33、通过某交叉路口的汽车可看作普阿松过程，若在一分钟内没有车的概率为 0.2，求在 2 分钟内有多于一车的概率。

34、若每蚕产 n 个卵的概率服从普阿松分布，参数为λ，而每个卵变为成虫的概率为 p，且各卵是否变为成虫彼此间没有关系，求每蚕养出 k 只小蚕的概率。

35、某车间宣称自己产品的合格率超过 99%，检验售货员从该车间的 10000 件产品中抽查了 100 件，发现有两件次品，能否据此断定该车间谎报合格率？

36、在人群中男人患色盲的占 5%，女人患色盲的占 0.25%，今任取一人后检查发现是一个色盲患者，问它是男人的概率有多大?

37、四种种子混在一起，所占的比例是甲：乙：丙：丁=15：20：30：35，各种种子不同的发芽率是： 2%，3%，4%，5%，已从这批种子中任送一粒观察,结果未发芽，问它是甲类种子的概率是多少?

38、对同一目标由 3 名射手独立射击的命中率是 0.4、0.5,和 0.7，求三人同时各射一以子弹而没有一发中靶的概率?

39、有两个袋子，每个袋子装有 a 只黑球，b 只白球，从第一个中任取一球放入第二个袋中，然后从第二个袋中取出一黑球的概率是多少？

40、已知产品中 96%是合格的，现有一种简单的检查方法，它把真正的合格品确认为合格品的概率为 0.98，而误认废品为合格品的概率为 0.05，求此简化法检查下为合格品的一个产品确实是合格品的概率。

41、某射手用 A,B,C 三支枪各向靶射一发子弹，假设三支枪中靶的概率分别为 $0.4,0.3,0.5$，结果恰有两弹中靶，问 A 枪射中的概率为多少?

42、已知产品中 96%是合格的，现有一种简化的检查方法，它把真正的合格品确认为合格品的概率为 0.98，而误认废品为合格品的概率为 0.05,求此简化法检查下为合格品的一个产品确实是合格品的概率。

43、设第一个盒子中有两个白球和一个黑球，第二个盒中有三个白球和一个黑球，第三个盒子中有两个白球和两个黑球。此三个盒子外形相同，某人任取一个盒子，再从中任取一个球，求他取得白球的概率。

44、用血清蛋白的方法诊断肝癌，令 $C=$ “被检查者患有肝癌”， $A=$“判断被检查者患有肝癌”。设 $P(C)=0.0004,\ P(A/C)=0.95, P(A/\bar{C})=0.90$, 现有一个人诊断患有肝癌，求他确有肝癌的概率。

45、一批零件共 100 个，次品有 10 个。每次从其中任取 1 个零件，菜取 3 次，取出后不放回。示第 3 次才取得合格品的概率。

46、10 个零件中有 3 个次品，7 个合格品，每次从其中任取 1 个零件，共取 3 次，取后不放回。求：（1）这 3 次都抽不到合格品的概率；（2）这 3 次至少有 1 次抽到合格品的概率。

47、一批产品中有 15%的次品。进行独立重复抽样检查，问取出的 20 个样品中最大可能的次品数是多少？并求其概率。

48、一电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布。求（1）每分钟恰有 6 次呼唤的概率；（2）每分钟呼唤次数不超过 10 的概率。

49、有一汽车站有大量汽车通过，设每辆汽车在一天某段时间出事故的概率为 0.0001。在某天该段时间内有 1000 辆汽车通过，求事故次数不少于的概率。

50、某商店出售某种贵重物品，根据以往的经验，每月销售量 X 服从参数 $\lambda = 4$ 的泊松分布。问在月初进货时，要库存多少件才能以 99。2%的概率充分满足顾客的需要？

51、从某厂产品中任取 200 件，检查结果发现其中有 4 件废品。我们能否认为该产品的废品率不超过 0.005？

52、若 A,B,C 是三个独立的事件，则 $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ 亦是独立的。

53、设 P(A)>0，若 A 与 B 相互独立,则 $P(B|\overline{A})$=P(B)。

54、若 A,B,C 相互独立，则 $A\cup B$ 和 C 及 $A-B$ 与 C 亦独立。

55、设 P(A)>0, P(B)>0，　证明 A 和 B 相互独立与 A 和 B 互不相容不能同时成立。

56、求证：如果 $P(A|B) > P(A)$，则 $P(B|A) > P(B)$。

57、证明：若事件 A 与事件 B 相互独立，则事件 $\overline{A}$ 与事件 $\overline{B}$ 相互独立。

58、设 A，B，C 三事件相互独立，求证 $A\bigcup B, AB, A-B$ 皆与 C 独立。

59、若 A，B，C 相互独立，则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 亦相互独立。

60、若 A 与 B 独立，证明 $\{\phi, A, \overline{A}, \Omega\}$ 中任何一个事件与 $\{\phi, B, \overline{B}, \Omega\}$ 中任何一个事件是相互独立的。

第二章　解答

1、**解**：自左往右数，排第 i 个字母的事件为 A_i，则

$$P(A_1)=\frac{2}{5},\ P(A_2|A_1)=\frac{2}{4},\ P(A_3|A_2A_1)=\frac{1}{3},\ P(A_4|A_3A_2A_1)=\frac{1}{2}$$

$$P(A_5|A_4A_3A_2A_1)=1。$$

所以题中欲求的概率为

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)P(A_4|A_3A_2A_1)P(A_5|A_4A_3A_2A_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{30}$$

2、解：总场合数为 $2^3=8$。设 A={三个孩子中有一女}，B={三个孩子中至少有一男}，A 的有利场合数为 7，AB 的有利场合为 6，所以题中欲求的概率 P（B|A）为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/8}{7/8}=\frac{6}{7}.$$

3、解：（**1**）M 件产品中有 m 件废品，$M-m$ 件正品。设 A={两件有一件是废品}，B={两件都是废品}，显然 $A\supset B$，则 $P(A)=\left(C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2\right)/C_m^2$　$P(B)=C_m^2/C_M^2$，

题中欲求的概率为

$$P(B|A)=P(AB)/P(A)=P(B)/P(A)=\frac{C_m^2/C_M^2}{(C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2)/C_M^2}=\frac{m-1}{2M-m-1}.$$

（**2**）设 A={两件中有一件不是废品}，B={两件中恰有一件废品}，显然 $B\subset A$，则 $P(A)=\left(C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1\right)/C_M^2$，　$P(B)=C_m^1C_{M-m}^1/C_M^2$.

题中欲求的概率为

$$P(B|A)=P(AB)/P(A)=P(B)/P(A)=\frac{C_m^1C_{M-m}^1/C_M^2}{(C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1)/C_M^2}=\frac{2m}{M+m-1}.$$

（**3**）P{取出的两件中至少有一件废品}=$\left(C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2\right)/C_M^2=\dfrac{m(2M-m-1)}{M(M-1)}$.

4、解：A={甲取出一球为白球}，B={甲取出一球后，乙取出一球为白球}，C={甲，乙各取出一球后，丙取出一球为白球}。则　$P(A)=\dfrac{a}{(a+b)}$　甲取出的球可为白球或黑球，利用全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\qquad=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}=\frac{b}{a+b}$$

甲， 乙取球的情况共有四种，由全概率公式得

$$P(C)=P(AB)P(C|AB)+P(A\overline{B})P(C|A\overline{B})+P(\overline{A}B)P(C|\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})P(C|\overline{A}\overline{B})$$

$$=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b-2}{a+b-2}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}$$

$$+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}+\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b}{a+b-2}$$

$$=\frac{b(a+b-1)(a+b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}=\frac{b}{a+b}.$$

5、解：设 B={两数之和大于 10}，A_i={第一个数取到 i}，$i=0,1,\cdots,9$。则 $P(A_i)=\frac{1}{10}$，

$$P(B\mid A_0)=P(B\mid A_1)=0,\ P(B\mid A_i)=(i-1)/9,\ i=2,3,\cdots 5;\ P(B\mid A_j)=(j-2)/9,$$

$j=6,7,8,9$。由全概率公式得欲求的概率为

$$P(B)=\sum_{i=0}^{9}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{16}{45}=0.356.$$

6、解：设 A_1={从甲袋中取出 2 只白球}，A_2={从甲袋中取出一只白球一只黑球}，A_3={从甲袋中取出 2 只黑球}，B={从乙袋中取出 2 只白球}。则由全概率公式得

$$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)$$

$$=\frac{C_a^2C_{a+2}^2}{c_{A+B}^2c_{\alpha+\beta+2}^2}+\frac{c_a^1C_b^1C_{\alpha+1}^2}{C_{a+b}^2C_{\alpha+\beta+2}^2}+\frac{c_b^2C_a^2}{C_{a+b}^2C_{\alpha+\beta+2}^2}.$$

7、解：A_1={从第一袋中取出一球是黑球}，……，A_i={从第一袋中取一球放入第二袋中，…，再从第 $i-1$ 袋中取一球放入第 i 袋中，最后从第 i 袋中取一球是黑球}，$i=1,\cdots,N$。则

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\quad P(\overline{A}_1)=\frac{b}{(a+b)}.$$

一般设 $P(A_k)=\frac{a}{(a+b)}$，则 $P(\overline{A}_k)=\frac{b}{(a+b)}$，得

$$P(A_{k+1})=P(A_{k+1}\mid A_k)P(A_k)+P(A_{k+1}\mid \overline{A}_k)P(\overline{A}_k)=\frac{a}{(a+b)}.$$

由数学归纳法得 $$P(A_N)=\frac{a}{(a+b)}.$$

8、解：设 A_i={第 i 回出正面}，记 $p_i = P(A_i)$，则由题意利用全概率公式得

$$P(A_{i+1}) = P(A_{i+1} \mid A_i)P(A_i) + P(A_{i+1} \mid \overline{A}_i)P(\overline{A}_i)$$

$$= pp_1 + (1-p)(1-p_1) = (2p-1)p_1 + (1-p)\text{。}$$

已知 $p_i = c$，依次令 $i = n-1, n-2, \cdots, 1$ 可得递推关系式

$$P_n = (2p-1)p_{n-1} + (1-p), \qquad P_{n-1} = (2p-1)p_{n-2} + (1-p), \cdots,$$

$$P_2 = (2p-1)p_1 + (1-p) = (2p-1)c + (1-p).$$

解得

$$P_n = (1-p)[1 + (2p-1) + (2p-1)^2 + \cdots + (2p-1)^{n-2}] + c(2p-1)^{n-1},$$

当 $p \neq 1$ 时利用等比数列求和公式得

$$p_n = (1-p)\frac{1-(2p-1)^{n-1}}{1-(2p-1)} + c(2p-1)^{n-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + c\,(2p-1)^{n-1}. \qquad (*)$$

（1）若 $p = 1$，则 $p_n \equiv C,\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n = C$；

（2）若 $p = 0$，则当 $n = 2k-1$ 时，$p_n = c$；当 $n = 2k$ 时，$p_n = 1-c$。

若 $c = \frac{1}{2}$，则 $p_n \equiv \frac{1}{2},\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$

若 $c \neq \frac{1}{2}1$，则 $c \neq 1-c,\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n$ 不存在。

（3）若 $0 < p < 1$，则由（*）式可得

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + c(2p-1)^{n-1}\right] = \frac{1}{2}.$$

9、解：令 A_i, B_i, C_i 分别表示第 i 次交换后，甲袋中有两只白球，一白一黑，两黑球的事件，则由全概率公式得

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1} \mid A_n) + P(B_n)P(A_{n+1} \mid B_n) + P(C_n)P(A_{n+1} \mid C_n)$$

$$=0\cdot p_n+\frac{1}{4}q_n+0\cdot r_n=\frac{1}{4}q_n,$$

$$q_{n+1}=P(B_{n+1})=P(A_n)P(B_{n+1}\mid A_n)+P(B_n)P(B_{n+1}\mid B_n)+P(C_n)P(B_{n+1}\mid C_n)$$

$$=1\cdot p_n+\frac{1}{2}q_n+1\cdot r_n=p_n+\frac{1}{2}q_n+r_n,,$$

$$r_{n+1}=P(C_{n+1})=P(A_n)P(C_{n+1}\mid A_n)+P(B_n)P(C_{n+1}\mid B_n)+P(C_n)P(C_{n+1}\mid C_n)$$

$$=0\cdot p_n+\frac{1}{4}q_n+0\cdot r_n=\frac{1}{4}q_n.$$

这里有 $p_{n+1}=r_{n+1}$，又 $p_{n+1}+q_{n+1}+r_{n+1}=1$，所以 $q_{n+1}=1-2p_{n+1}$，同理有 $q_n=1-2p_n$，再由 $p_{n+1}=\frac{1}{4}q_n$ 得 $p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-2p_n)$。所以可得递推关系式为

$$\begin{cases} r_{n+1}=p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-2p_n), \\ q_{n+1}=1-2p_{n+1} \end{cases}$$

初始条件是甲袋一白一黑，乙袋一白一黑，即 $p_0=r_0=0,\ q_0=1$，由递推关系式得

$$r_{n+1}=p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-2p_n)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}p_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}p_{n-1})=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}p_{n-1}=\cdots$$

$$=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+2}}+\frac{(-1)^{n+1}p_0}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{6}\left[1-(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{1}{6}+(-1)^n\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2},$$

$$q_{n+1}=1-2p_{n+1}=\frac{2}{3}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{6},\quad \lim_{n\to\infty}q_n=\frac{2}{3}.$$

10、解：设 A$_n$={家庭中有 n 个孩子}，n=0,1,2,⋯，B={家庭中有 k 个男孩}。注意到生男孩与生女孩是等可能的，由二项分布$(p=\frac{1}{2})$得

$$P(B|A_n)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{n=k}^{\infty}P(A_n)P(B|A_n)=\sum_{n=k}^{\infty}ap_nC_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n=a\sum_{i=0}^{\infty}C_{k+1}^1\left(\frac{p}{2}\right)^{k+1}\ （其中 i=n-k）$$

$$=a\left(\frac{p}{2}\right)^k\sum_{i=0}^{\infty}C_{k+1}^1\left(\frac{p}{2}\right)^1=a\left(\frac{p}{2}\right)^k\left(1-\frac{p}{2}\right)^{-k-1}=\frac{2ap^k}{(2-p)^{k+1}}.$$

11、解：（1）设 A={至少有一男孩}，B={至少有 2 个男孩}。$A\supset B, AB=B$，由$0<\frac{p}{(2-p)}<1$得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2ap^k}{(2-p)^{k+1}}=\frac{2a}{2-p}\cdot\frac{\frac{p}{(2-p)}}{\frac{1-p}{(2-p)}}=\frac{ap}{(2-p)(1-p)},$$

$$P(B)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2ap^k}{(2-p)^{k+1}}=\frac{2a}{2-p}\cdot\frac{\frac{p^2}{(2-p)^2}}{\frac{1-p}{(2-p)}}=\frac{ap^2}{(2-p)^2(1-p)^2},$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{p}{2-p}.$$

（2）C={家中无女孩}={家中无小孩，或家中有 n 个小孩且都是男孩，n 是任意正整数}，则

$$P(C)=1-\frac{ap}{1-p}+\sum_{a=1}^{\infty}ap^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=1-\frac{ap}{1-p}+\frac{\frac{ap}{2}}{1-\frac{p}{2}}=1-\frac{ap}{1-p}+\frac{ap}{2-p}=\frac{2-3p-ap+p^2}{(1-p)(2-p)}$$

A $_1$ ={家中正好有一个男孩}={家中只有一个小孩且是男孩}，则 $P(A_1)=ap\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ap$，且

$A_1\subset C$，

所以在家中没有女孩的条件下，正好有一个男孩的条件概率为

$$P(A_1\mid C)=\frac{P(A_1C)}{P(C)}=\frac{P(A_1)}{P(C)}=\frac{1}{2}\frac{ap}{\frac{2-3p-ap+p^2}{(1-p)(2-p)}}=\frac{ap(1-p)(2-p)}{2(2-3p-ap+p^2)}.$$

12、**解**：设 A={产品确为合格品}，B={检查后判为合格品}。已知 $P(B\mid A)=0.98$，$P(B\mid\overline{A})=0.05,\ P(A)=0.96$，求 $P(A\mid B)$。由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$$

$$=\frac{0.96\times0.98}{0.96\times0.98+0.04\times0.05}=\frac{0.9408}{0.9428}=0.9979.$$

13、证:（**1**）$P((A\cup B)\cap C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(C)P(A\cup B),$$

∴ $A\cup B$ 与 C 独立。

（**2**）$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(AB)P(C)$

∴AB 与 C 独立。

（**3**）$P((A-B)C)=P(A\overline{B}C)=P(AC(\Omega-B))=P(AC)-P(ABC)$

$$=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=P(C)[P(A)-P(AB)]=P(C)P(A-B),$$

∴ $A-B$ 与 C 独立。

14、证： $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-PAB)]$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1-P(A))(1-P(B))$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B}) \text{，}$$

同理可证 $P(\overline{A}\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{C})$，

$$P(\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{B})P(\overline{C}) .$$

又有

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1 - P(A\cup B\cup C)$$

$$= 1 - \left[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\right]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A)P(B) + P(A)P(C) + P(B)P(C) +$$

$$- P(A)P(B)P(C)$$

$$= (1-P(A))(1-P(B))(1-P(C)) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) \text{，}$$

所以 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 相互独立。

15、证：**必要性**。事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，用归纳法证。不失为一般性，假设总是前连续 m 个集 $\hat{A}_i$ 取 $\overline{A}_i$ 的形式。当 $m=1$ 时，

$$P(\overline{A}_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_2 \cdots A_n) - P(A_1 \cdots A_n) - P(A_1 \cdots A_n)$$

$$= P(A_2)\cdots P(A_n) - P(A_1)\cdots p(A_n) = P(\overline{A}_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \text{。}$$

设当 $m=k$ 时有

$$P(\overline{A}_1 \cdots A_k A_{k+1} \cdots A_n) = P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(A_{k+1}\cdots A_n) \text{，}$$

则当 $m = k+1$ 时

$$P(\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{k+1} A_{k+2} \cdots A_n) = P(\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_k A_{k+2} \cdots A_n) - P(\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_k A_{k+1} \cdots A_n)$$

$$= P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(A_{k+2})\cdots P(A_n) - P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(A_{k+1})\cdots P(A_n)$$

$$= P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)(1-P(A_{k+1}))P(A_{k+2})\cdots P(A_n)$$

$$= P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(\overline{A}_{k+1})P(A_{k+2})\cdots P(A_n)$$

从而有下列 2^n 式成立：

$$P(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_n) = P(\hat{A}_1)P(\hat{A}_2)\cdots P(\hat{A}_n),$$

其中 $\hat{A}_i$ 取 A_i 或 $\overline{A}_i$。

充分性。设题中条件成立，则

$$P(A_1\cdots A_n) = P(A_1)\cdots P(A_n), \tag{1}$$

$$P(A_1\cdots A_{n-1}\overline{A}_n) = P(A_1)\cdots P(A_{n-1})P(\overline{A}_n). \tag{2}$$

$\because \quad A_1\cdots A_{n-1}A_n \cap A_1\cdots A_{n-1}\overline{A}_n = \phi$,

$\therefore \quad P(A_1\cdots A_{n-1}) = P(A_1\cdots A_{n-1}A_n \cup A_1\cdots A_{n-1}\overline{A}_n)$.

(1)+(2)得 $$P(A_1\cdots A_{n-1}) = P(A_1)\cdots P(A_{n-1})。 \tag{3}$$

同理有

$$P(A_1\cdots A_{n-2}\overline{A}_{n-1}A_n) = P(A_1)\cdots P(A_{n-2})P(\overline{A}_{n-1})P(A_n),$$

$$P(A_1\cdots A_{n-2}\overline{A}_{n-1}\overline{A}_n) = P(A_1)\cdots P(A_{n-2})P(\overline{A}_{n-1})P(\overline{A}_n)$$

两式相加得

$$P(A_1\cdots A_{n-2}\overline{A}_{n-1}) = P(A_1)\cdots P(A_{n-2})P(\overline{A}_{n-1}). \tag{4}$$

(3)+(4)得

$$P(A_1\cdots A_{n-2}) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{n-2})。$$

同类似方法可证得独立性定义中 $2^n - n + 1$ 个式子，

$\therefore \quad A_1,\cdots,A_n$ 相互独立。

16、证：$P(\phi\phi) = P(\phi) = 0\times 0 = P(\phi)P(\phi),$

$$P(\Omega\phi) = 0 = P(\Omega)P(\phi), \quad P(\Omega\Omega) = 1 = P(\Omega)P(\Omega),$$

$$P(\Omega B) = P(B) = P(\Omega)P(B),$$

$$P(\Omega A)=P(A)=P(\Omega)P(A),$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B}),$$

同理可得 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$。证毕。

17、解：P{三次射击恰击中目标一次} $=0.4(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)0.5(1-0.7)+(1-0.4)(1-0.5)0.7$

$$=0.36$$

P{至少有一次命中}=1−P{未击中一次} $=1-(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.91$

18、解：（1）P{所有的事件全不发生} $=P\{\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n\}=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_n)=\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$。

（2）P{至少发生其一} $=P(A_1\cup\cdots\cup A_n)$

$$P(\overline{\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n})=1-P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n)=1-\prod_{k=1}^{n}(1-p_n)。$$

（3）P{恰好发生其一} $=p_1(1-p_2)\cdots(1-p_n)+(1-p_1)p_2(1-p_3)\cdots(1-p_n)+$

$$+\cdots+(1-p_1)\cdots(1-p_{n-1})p_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i-2\sum_{n\ge j>i\ge 1}p_ip_j+\cdots+(-1)^{n-1}n\prod_{i=1}^{n}p_i。$$

19、解：本题中认为各元件发生故障是相互独立的。记 A_0={元件 k 发生故障}，A_1={元件 k_1 发生故障}，A_2={元件 k_2 发生故障}。则

P{电路断开} $=P(A_0\cup A_1A_2)=P(A_0)+P(A_1A_2)-P(A_0A_1A_2)$

$$=0.3+0.2\times0.2-0.3\times0.2\times0.2=0.328。$$

20、**解**：以 A_k 表事件"A 于第 k 次试验中出现"，$P(A_k)=\varepsilon$，由试验的独立性得，前 n 次试验中 A 都不出现的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)=(1-\varepsilon)^n。$$

于是前 n 次试验中，A 至少发生一次的概率为

$$1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=1-(1-\varepsilon)^n\to 1\quad(n\to\infty)。$$

这说明当重复试验的次数无限增加时，小概率事件 A 至少发生一次的概率可以无限地向 1 靠近，从而可看成是必然要发生的。

21、**解**：我们认为各车床或同一车床制造的各个零件的好坏是相互独立的，由此可得

$$P\{所有零件均为一级品\}=0.8^3\times 0.7^2=0.2509。$$

22、**解**：利用二项分布得 $P\{至少出现一次正面\}=1-P\{n次全部出现反面\}=1-(1-p)^n$。

$$P\{至少出现两次正面\}=1-(1-p)^n-C_n^1p(1-p)^{n-1}=1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}。$$

23、**解**：（1）设 A，B，C 分别表示每局比赛中甲，乙丙获胜的事件，这是一个 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$ 的多项分布。欲丙成为整场比赛的优胜者，则需在未来的三次中，丙获胜三次；或在前三次中，丙获胜两次乙胜一次，而第四次为丙获胜。故本题欲求的概率为

$$p=\frac{3!}{3!\,0!\,0!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^0+\frac{3!}{2!\,1!\,0!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^0。$$

24、**解**：利用两个的二项分布，得欲副省长的概率为

$$p=\sum_{i=0}^{n}P\{甲掷出i次正面,\ 乙掷出i次正面\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot C_n^i\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{i=0}^{n}(C_n^i)^2=C_{2n}^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}。$$

25、**解**：事件 A 出现奇数次的概率记为 b，出现偶数次的概率记为 a，则

$$a=C_n^0p^0q^n+C_n^2p^2q^{n-2}+\cdots,$$

$$b = C_n^1 p\, q^{n-1} + C_n^3 p^3 q^{n-3} + \cdots 。$$

利用 $a+b=(p+q)^n=1,\ a-b=(q-p)^n$，可解得事件 A 出现奇数次的概率为

$$b=\frac{1}{2}\left[1-(p-q)^n\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n 。$$

顺便得到，事件 A 出现偶数次的概率为 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n$。

26、解： 事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A”，相当于事件“在前 $k+m-1$ 次试验中出现 k 次 A，$m-1$ 次 $\overline{A}$，而第 $m+k$ 次出现 $\overline{A}$”，故所求的概率为

$$C_{k+m-1}^{k} p^k q^{m-1} \cdot q = C_{k+m-1}^{k} p^k q^m$$

注：对事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A”，若允许在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前也可以出现 $k+1$ 次 A，$k+2$ 次 A 等，这就说不通。所以，事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A”的等价事件，是“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前恰出现 k 次 A”。而对事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A 之前”（记为 B）就不一样，即使在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现了 $k+1$ 次 A，$k+2$ 次 A 等，也可以说事件 B 发生，所以事件 B 是如下诸事件的并事件：“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前恰出现 i 次 A”，$i=k,k+1,\cdots$。

27、解： 设 $A_n=$｛经 n 次试验后，黑球出现在甲袋中｝，$\overline{A}_n=$｛经 n 次试验后，黑球出现在乙袋中｝，$C_n=$｛第 n 次从黑球所在的袋中取出一个白球｝。记 $p_n=P(A_n)$，$c_n=P(\overline{A}_n)=1-p_n$，$n=0,1,2,\cdots$。当 $n\ge 1$ 时，由全概率公式可得递推关系式：

$$p_n = P(A_n \mid A_{n-1})P(A_{n-1}) \_ P(A_n \mid \overline{A}_{n-1})P(\overline{A}_{n-1})$$

$$= P(C_n \mid A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(\overline{C}_n \mid \overline{A}_{n-1})P(\overline{A}_{n-1})$$

$$= p_{n-1}\cdot\frac{N-1}{N} + q_{n-1}\cdot\frac{1}{N} \quad = \frac{N-1}{N}p_{n-1} + \frac{1}{N}(1-p_{n-1}),$$

即 $$p_n = \frac{N-2}{N}p_{n-1} + \frac{1}{N} \quad (n\ge 1)。$$

初始条件 $p_0=1$，由递推关系式并利用等比级数求和公式得

$$p_n=\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}+\cdots+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1}+\left(\frac{N-2}{N}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{N}\left[1-\left(\frac{N-2}{N}\right)^n\right]}{\left(1-\frac{N-2}{N}\right)+\left(\frac{N-2}{N}\right)^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n。$$

若 $N=1$，则 $n=2k+1$ 时 $p=0$，当 $n=2k$ 时 $p_n=1$。

若 $N=2$，则对任何 n 有 $p_n=\frac{1}{2}$。

若 $N>2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$（N 越大，收敛速度越慢）。

28、解： P={有 10 个或更多个终端同时操作}=P{有 10 个或不足 10 个终端不在操作}

$$=\sum_{j=0}^{10}C_{20}^j(0.3)^j(0.7)^{20-j}=0.9829。$$

29、解： 利用普阿松逼近定理计算 $\lambda=5000\times0.001=5$，则打中两弹或两终以上的概率为

$$p=1-(0.999)^{5000}-5000(0.999)^{4999}\times0.001\approx1-e^{-5}-5e^{-5}=0.9596$$

30、解： 事件“有两个以上的人生于元旦”的对立事件是“生于元旦的人不多于两个”利用 $p-\frac{1}{365}$ 的二项分布得欲求的概率为

$$p=1-\sum^{2}C_{50}^i\left(\frac{1}{365}\right)^i\left(1-\frac{1}{365}\right)^{50-1}$$

$$=\frac{1-(364^2+50\times364+25\times49)364^{48}}{365^{50}}=0.00037。$$

31、解： 每个错字出现在每页上的概率为 $p=\frac{1}{500}$，500 个错字可看成做 500 次努里试验，利用普阿松

逼近定理计算，$\lambda = 500 \times \frac{1}{500} = 1$，得

P{某页上至少有三个错字}=1－1-P{某页上至多有两个错字}

$$= 1 - \sum_{i=0}^{2} C_{500}^{i} \left(\frac{1}{500}\right)^{i} \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{500-1}$$

$$\approx 1 - (e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1}) = 0.0803 .$$

32、解：每一毫升平均含一个细菌，每 2 毫升含 2 个，所以每只试管中含有细菌数服从 $\lambda = 2$ 的普阿松分布。由此可得

$$\text{P\{5 个试管中都有细菌\}} = (1 - e^{-2})^{5} = 0.4833 ;$$

$$\text{P\{至少有三个试管中有细菌\}} = \sum_{i=2}^{5} C_{5}^{i} (1 - e^{-2})^{i} (e^{-2})^{5-i} = 0.9800 .$$

计算时利用了 $p = 1 - e^{-2}$ 的二项分布。

33、解：设一分钟内通过某交叉路口的汽车数服从 λ 的普阿松分布，则

$$\text{P\{1 分钟内无车\}} = e^{-\lambda_i} = 0.2, \quad \lambda_i = -ln 0.2 = 1.61$$

由此得，2 分钟内通过的汽车数服从 $\lambda = \lambda_i \times 2 = 3.22$ 的普阿松分布，从而 2 分钟内多于一车的概率为

$$p = 1 - e^{-3.22} - 3.22 \times e^{-3.22} = 0.831 .$$

34、解：若蚕产 i 个卵，则这 i 个卵变为成虫数服从概率为 $p, n = i$ 的二项分布，所以

$$\text{P\{蚕养出 n 只小蚕\}} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} e^{-\lambda} C_{i}^{k} p^{k} (1-p)^{1-k} \qquad (\text{令} m = i - k)$$

$$= \frac{p^{k} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+m}}{m!} (1-p)^{m} = \frac{1}{k!} (\lambda p)^{k} e^{-\lambda}$$

35、解：假设产品合格率 $p \geq 0.99$，不妨设 $p = 0.99$。现从 10000 件中抽 100 件，可视为放回抽样。而 100 件产品中次品件数服从二项分布，利用普阿松逼近定理得，次品件数不小于两件的概率为

$$p=1-(0.99)^{100}-100\times0.01\times0.99^{99}\approx1-e^{-1}-e^{-1}=0.2642$$

此非小概率事件，所以不能据此断定该车间谎报合格率。（注意，这并不代表可据此断定，该车间没有谎报合格率。）

36、解: 设 $A=\{$任取一人是男性$\}$ $B=\{$任取一人是女性$\}$ $C=\{$任取一人检查患色盲$\}$

则 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$ $P(C|A)=0.05$ $P(C|B)=0.0025$

故所求概率为 $P(A|C)$ 由 bayes 公式可得 $P(A|C)=\dfrac{P(A)\cdot P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}=\dfrac{20}{21}$

37、解：设 A,B,C,D 分别表示任取一粒种子属于甲、已、丙、丁的事件。

而 E 表示任取一粒种子，它不发芽的事件，则

$$P(A)=0.15\quad P(B)=0.20\quad P(C)=0.30\quad P(D)=0.35$$

又 $P(E|A)=0.02$ $P(E|B)=0.03$ $P(E|C)=0.04$ $P(E|D)=0.05$

由 Bayes 公式，所求概率

$$P(A|E)=\frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A)+\cdots+P(D)P(E|D)}=\frac{6}{73}$$

38、解：记 A_i ={第 i 名射手射中目标}，则 $P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.7$

$\because$ A_1,A_2,A_3 相互独立。

$\therefore$ 所求概率 $P(\overline{A_1A_2A_3})=(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.09$

39、解：设从第一个袋子摸出黑球 A，从第二个袋中摸出黑球为 B，则

$$P(A)=\frac{a}{a+b}\qquad P(\overline{A})=\frac{b}{a+b}\qquad P(B|A)=\frac{a+1}{a+b+1}\qquad P(B|\overline{A})=\frac{a}{a+b+1}$$

由全概公式知:

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{a}{a+b}$$

40、解： 设 A 表示其合格品，设 B 表示被认为是合格品， 则

$$P(A)=0.96,\ \ P(\overline{A})=0.04,\ \ P(B\,|\,A)=0.98,\ \ P(B\,|\,\overline{A})=0.05$$

由贝叶斯公式

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(B\,|\,A)P(A)}{P(B\,|\,A)P(A)+P(B\,|\,\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{0.98\times0.96}{0.98\times0.96+0.04\times0.05}=0.9979$$

41、解：设 $A=\{$恰有两弹中靶$\}$，$B=\{$A 击中$\}$ 则

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{0.4\times0.3\times0.5+0.4\times0.7\times0.5}{0.4\times0.3\times0.5+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.3\times0.5}=\frac{20}{29}$$

42、解：设 $A=\{$被检查的产品被认为是合格品$\}$ $B=\{$被检查的产品确实是合格品$\}$

则 $P(B)=0.96$ $P(\overline{B})=0.04$ $P(A\,|\,B)=0.98$ $P(A\,|\,\overline{B})=0.05$

故 $$P(B\,|\,A)=\frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(B)P(A\,|\,B)+P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})}$$

$$=\frac{0.96\times0.98}{0.96\times0.98+0.04\times0.05}=0.998$$

43、解：$p(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)p(B/A_i)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4})=\frac{23}{36}$

44、解：$P(C/A)=\dfrac{P(C)P(A/C)}{P(C)P(A/C)+P(\overline{C})P(A/\overline{C})}=\dfrac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.1}=0.0038$

45、**解**：第 3 次才取得合格品，意味着前 2 次取得的是次品。记 $A_1=\{$第 1 次取得次品$\}$，$A_2=\{$第 2 次取得次品$\}$，$A_3=\{$第 3 次取得合格品$\}$。所求概率论为

$$p=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx0.00835$$

46、**解**:（1）记 $A_1=\{$第 1 次取得次品$\}$，$A_2=\{$第 2 次取得次品$\}$，$A_3=\{$第 3 次取得次品$\}$，则

$$p_1=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{6}{720}\approx0.0083$$

（2）“3 次至少有 1 次抽到合格品”的对立事件是“3 次都抽不到合格品 ”，故

$$p_2 = 1 - p_1 \approx 0.9917$$

47、 解： $n = 20,\ p = 0.15$。当 $i = \left[(n+1)p\right] = \left[21\times 0.15\right] = \left[3.15\right] = 3$ 时， $p_i = C_n^i p^i q^{n-i}$ 取得最大值。

$$p_3 = C_{20}^2 \times 0.15^3 \times 0.85^{17} = 1140 \times 0.003375 \times 0.063113 = 0.2428$$

48、解：（1）设 X 为每分钟呼唤次数，则 $X \sim P(4)$。故 $P\{X = 6\} = \dfrac{4^6}{6!}e^{-4} \approx 0.1042$

（2） $P\{X \le 10\} = 1 - P\{X > 1\} = 1 - P\{X \ge 11\} = 1 - \sum\limits_{i=11}^{\infty} \dfrac{4^i}{i!}e^{-4}$

查附表 2，得 $P\{X \ge 11\} = 0.00284$，故 $P\{X \le 10\} = 1 - 0.00284 = 0.99716$

49、解： $p = 0.0001,\ n = 1000$。设事故次数为 X，则 $X \sim B(1000, 0.0001)$。因 n 较大， p 很小， $np = 0.1$， X 近似服从泊松分布 $P(0.1)$，故

$$P\{X \ge 2\} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{0.1^i}{i!}e^{-0.1} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - e^{-0.1} - 0.1e^{-0.1} = 1 - 1.1e^{-0.1} \approx 0.00468$$

50、解：设每月初库存 k 件。依题意大利 $P\{X = i\} = \dfrac{4^i}{i!}e^{-4}$ $\quad i = 0,1,2,\cdots$

$$P\{X \le k\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{i!}e^{-i} \ge 0.992$$

即要求 k，使得 $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \dfrac{4^i}{i!}e^{-4} \le 0.008$

查附表 2，当 $k + 1 = 10$ 时，

51、解：若该工厂的废品率不大于 0.005，则检查 200 件产品发现 4 件废品的概率应该不大于

$$p = C_{200}^4 \times 0.005^4 \times 0.995^{100}$$

用泊松定理作近似计算 $\quad \lambda = 200 \times 0.005 = 1$

得 $$p\approx\frac{1^4e^{-1}}{4!}=0.0153。$$

这一概率很小。根据实际推断原理，这一小概率事件实际上不太会发生，故不能相信该工厂的废品率不超过 0.005。

52、证：$\because A,B,C$独立，$\therefore P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

从而由$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$ 得 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$

故$\overline{A}$与B独立，同理可证 $\overline{A}$与$\overline{B}$,$\overline{B}$与$\overline{C}$,$\overline{A}$与$\overline{C}$独立，也可证 A与$\overline{C}$独立。

另一方面: $\because P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$$\therefore P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{B}\overline{C})-P(A\overline{B}\overline{C})$$

$$=P(\overline{B})P(\overline{C})-P(A\overline{C})+P(AB\overline{C})$$

$$=P(\overline{B})P(\overline{C})-P(A)\cdot P(\overline{C})+P(AB)-P(ABC)$$

$$=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})$$ 证毕

53、证：$\because A,B$独立$\therefore P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ 从而 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$

由条件概率公式 $$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A})\cdot P(B)}{P(\overline{A})}=P(B)$$

54、证：因为A,B,C相互独立，所以 $p(AB)=p(A)P(B)$ $p(BC)=P(B)(C)$

$$P(AC)=P(A)(C)\quad P(ABC)=P(A)(B)(C)$$

$$\therefore P((A\cup B)\cap C)=P(AC\cup BC)=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC)$$
$$=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)=P(A\cup B)P(C)$$
$$P((A\setminus B)\cap C)$$
$$=P(AC\overline{B}=P(AC)-P(ABC)$$
$$=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$
$$=P(A)(1-P(B))P(C)=P(A)P(\overline{B})P(C)=P(A\setminus B)P(C)$$

55、证：若 A 与 B 相互独立，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，从而 $P(AB)>0$，于是 A 与 B 相容。反之，

若 A 与 B 互不相容，即 $P(AB)=0$

则 $P(AB)\neq P(A)P(B)>0$ 于是 A 与 B 不相互独立.

56、证： 由 $P(A|B)>P(A)$ 那么：$P(AB)=P(A|B)P(B)>P(A)P(B)$

于是 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}>P(B)$

57、证：若事件 A 与 B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=(1-P(A))(1-P(B))$$

$$=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

58、证:（**1**）$P((A\bigcup B)\bigcap C)=P(AC\bigcup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(C)P(A\bigcup B),$$

$\therefore$ $A\bigcup B$ 与 C 独立。

（**2**）$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(AB)P(C)$

$\therefore$AB 与 C 独立。

（**3**）$P((A-B)C)=P(A\overline{B}C)=P(AC(\Omega-B))=P(AC)-P(ABC)$

$$=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=P(C)[P(A)-P(AB)]=P(C)P(A-B),$$

$\therefore A-B$ 与 C 独立。

59、证：$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-PAB)]$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=(1-P(A))(1-P(B))$$

$$=P(\overline{A})P(\overline{B}),$$

同理可证 $P(\overline{A}\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{C})$,

$$P(\overline{B}\overline{C})=P(\overline{B})P(\overline{C}).$$

又有

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-\left[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\right]$$

$$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)$$

$$-P(A)P(B)P(C)$$

$$=(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}),$$

所以 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 相互独立。

60、证：$P(\phi\phi)=P(\phi)=0\times 0=P(\phi)P(\phi)$,

$$P(\Omega\phi)=0=P(\Omega)P(\phi),\quad P(\Omega\Omega)=1=P(\Omega)P(\Omega),$$

$$P(\Omega B)=P(B)=P(\Omega)P(B),$$

$$P(\Omega A)=P(A)=P(\Omega)P(A),$$

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$（见本章第 17 题），

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B}),$$

同理可得 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$。证毕。

第三章 随机变量与分布函数

1、直线上有一质点，每经一个单位时间，它分别以概率 p 或 $1-p$ 向右或向左移动一格，若该质点在时刻 0 从原点出发，而且每次移动是相互独立的，试用随机变量来描述这质点的运动（以 S_n 表示时间 n 时质点的位置）。

2、设 ξ 为贝努里试验中第一个游程（连续的成功或失败）的长，试求 ξ 的概率分布。

3、c 应取何值才能使下列函数成为概率分布：（1）$f(k)=\frac{c}{N}, k=1,2,\cdots,N$;（2）$f(k)=c\frac{\lambda^k}{k!},\ k=1,2,\cdots,\quad \lambda>0$。

4、证明函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<\infty)$ 是一个密度函数。

5、若 ξ 的分布函数为 N（10，4），求 ξ 落在下列范围的概率：(1)（6，9）;（2)（7，12）;（3)（13，15）。

6、若 ξ 的分布函数为 N（5，4），求 a 使：（1）$P\{\xi<a\}=0.90$；（2）$P\{|\xi-5|>a\}=0.01$。

7、设 $F(x)=P\{\xi\le x\}$，试证 $F(x)$ 具有下列性质：（1）非降；（2）右连续；（3）$F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$。

8、试证：若 $P\{\xi\le x_2\}\ge 1-\beta$，$P\{\xi\ge x_1\}\ge 1-\alpha$，则 $P\{x_1\le\xi\le x_2\}\ge 1-(\alpha+\beta)$。

9、设随机变量 ξ 取值于[0，1]，若 $P\{x\le\xi<y\}$ 只与长度 $y-x$ 有关（对一切 $0\le x\le y\le 1$），试证 ξ 服从[0，1]均匀分布。

10、若存在 Θ 上的实值函数 $Q(\theta)$ 及 $D(\theta)$ 以及 $T(x)$ 及 $S(x)$，使

$$f_\theta(x)=\exp\{Q(\theta)T(x)+D(\theta)+S(x)\},$$

则称 $\{f_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ 是一个单参数的指数族。证明（1）正态分布 $N(m_0,\sigma^2)$，已知 m_0，关于参数 σ；（2）正态分布 $N(m_0,{\sigma_0}^2)$，已知 σ_0，关于参数 m；（3）普阿松分布 $p(k,\lambda)$ 关于 λ 都是一个单参数的指数族。

但 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，关于 θ 不是一个单参数的指数族。

11、试证 $f(x,y)=ke^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ 为密度函数的充要条件为 $a>0,\ c>0,\ b^2-ac<0,\quad k=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}$。

12、若 $f_1(x), f_2(y)$ 为分布密度，求为使 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)+h(x,y)$ 成为密度函数，$h(x,y)$ 必须而且

只需满足什么条件。

13、若(ξ,η)的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，

试求：（1）常数 A;（2）$P\{\xi<2,\eta<1\}$；（3）ξ的边际分布；（4）$P\{\xi+\eta<2\}$；

（5）$f(x|y)$；（6）$P\{\xi<2|\eta<1\}$。

14、证明多项分布的边际分布仍是多项分布。

15、设二维随机变量(ξ,η)的联合密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}e^{-y}$$

$k_1>0,\ k_2>0,\ 0<x\le y<\infty$，试求与$\xi$的$\eta$边际分布。

16、若$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$是对应于分布函数$F_1(x),F_2(x),F_3(x)$的密度函数，证明对于一切$\alpha(-1<\alpha<1)$，下列函数是密度函数，且具有相同的边际密度函数$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$：

$f_1(x),f_2(x),f_3(x)=f_1(x_1),f_2(x_2),f_3(x_3)\{1+\alpha[2F_1(x_1)-1]\times[2F_2(x_2)-1]\times[2F_3(x_3)-1]\}$。

17、设ξ与η是相互独立的随机变量，均服从几何分布$g(k,p)=q^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots$。令$\zeta=\max(\xi,\eta)$，试求（1）$(\zeta,\xi)$的联合分布；（2）$\zeta$的分布；（3）$\xi$关于$\zeta$的条件分布。

18、（1）若(ξ,η)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，问$\xi$与$\eta$是否相互独立？

（2）若(ξ,η)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，问$\xi$与$\eta$是否相互独立？

19、设(ξ,η,ζ)的联合密度函数为 $p(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z), & \begin{matrix}0\le x\le 2\pi\\ 当0\le y\le 2\pi时\\ 0\le z\le 2\pi\end{matrix}\\ 0, & 其它\end{cases}$

试证：ξ,η,ζ两两独立，但不相互独立。

20、设(ξ,η)具有联合密度函数$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，试证$\xi$与$\eta$不独立，但$\xi^2$与$\eta^2$是相互独立的。

21、若ξ_1与ξ_2是独立随机变量，均服从普要松分布，参数为λ_1 λ_2及，试直接证明

（1）$\xi_1+\xi_2$具有普承松分布，参数为$\lambda_1+\lambda_2$；

（2）$P\{\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$。

22、若ξ,η相互独立，且皆以概率$\frac{1}{2}$取值+1 及-1，令$\zeta = \xi\eta$，试证ξ,η,ζ两两独立但不相互独立。

23、若ξ服从普阿松分布，参数为λ，试求（1）$\eta = a\xi + b$；（2）$\eta = \xi^2$的分布。

24、设ξ的密度函数为$p(x)$，求下列随机变量的分布函数：（1）$\eta = \xi^{-1}$，这里$P\{\xi = 0\} = 0$；（2）$\eta = tg\xi$；（3）$\eta = |\xi|$。

25、对圆的直径作近似度量，设其值均匀分布于$(a+b)$内，试求圆面积的分布密度。

26、若ξ,η为相互独立的分别服从[0，1]均匀分布的随机变量，试求$\zeta = \xi + \eta$的分布密度函数。

27、设ξ,η相互独立，分别服从$N(0,1)$，试求$\zeta = \frac{\xi}{\eta}$的密度函数。

28、若ξ,η是独立随机变量，均服从$N(0,1)$，试求$U = \xi + \eta,\ V = \xi - \eta$的联合密度函数。

29、若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，且皆服从指数分布，参数分别为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，试求$\eta = \min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的分布。

30、在$(0,a)$线段上随机投掷两点，试求两点间距离的分布函数。

31、若气体分子的速度是随机向量$V = (x,y,z)$，各分量相互独立，且均服从$N = (0,\sigma^2)$，试证$S = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$斑点服从马克斯威尔分布。

32、设ξ,η是两个独立随机变量，ξ服从$N(0,1)$，η服从自由度为n的$x-^2$分布(3.14)，令$t = \xi/\sqrt{\eta/n}$，试证 t 的密度函数为 $P_n(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$

这分布称为具有自由度 n 的$t-$分布在数理统计中十分重要。

33、设ξ,η,ζ有联合密度函数$f(x,y,z) = \begin{cases} 6(1+x+y+z)^{-4}, & 当x>0,y>0,z>0时 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，试求$U = \xi + \eta + \zeta$的密度函数。

34、若ξ,η独立，且均服从$N(0,1)$，试证$U = \xi^2 + \eta^2$与$V = \frac{\xi}{\eta}$是独立的。

35、求证，如果ξ与η独立，且分别服从$\Gamma-$分布$G(\lambda,r_1)$和$G(\lambda,r_2)$，则$\xi+\eta$与$\frac{\xi}{\eta}$也独立。

36、设独立随机变量ξ,η均服从$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，问$\xi+\eta$与$\dfrac{\xi}{(\xi+\eta)}$是否独立？

37、若（ξ,η）服从二元正态分布（2.22），试找出$\xi+\eta$与$\xi-\eta$相互独立的充要条件。

38、对二元正态密度函数$p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65\right)\right\}$，

（1）把它化为标准形式（2.22）；（2）指出$a,b,\sigma_1,\sigma_2 r$；（3）求$p_i(x)$；（4）求$p(x|y)$。

39、设$a=0,\ B^{-1}=\begin{pmatrix}7&3&2\\3&4&1\\2&1&2\end{pmatrix}$，试写出分布密度（2.12），并求出$(\xi_1,\xi_2)$的边际密度函数。

40、设ξ,η是相互独立相同分布的随机变量，其密度函数不等于 0，且有二阶导数，试证若$\xi+\eta$与$\xi-\eta$相互独立，则随机变量$\xi,\eta,\xi+\eta,\xi-\eta$均服从正态分布。

41、若f是Ω上单值实函数，对$B\subset R^1$，记$f^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: f(\omega)\in B\}$。试证逆映射$f^{-1}$具有如下性质：

（1）$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$；

（2）$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$；

（3）$f^{-1}(\overline{B})=\overline{f^{-1}(B)}$.

42、设随机变量ξ的密度函数是$f(x)=\begin{cases}cx^2 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$（1）求常数 C；（2）求α使得$p(\xi>a)=p(\xi<a)$.

43、一个袋中有k张卡写有$k,k=1,2,\cdots,n$，现从袋中任取一张求所得号码数的期望。

44、设$r,v,\ \xi\sim N(m,\tau^2)$，$\eta$在$\xi=x$的条件密度分布是$P(y|x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}$，求$\eta=y$的条件下ξ的密度$p(x|y)$?

45、设ξ与η独立同服从$(0,a)$上的均匀分布，求$X=\dfrac{\xi}{\eta}$的分布函数与密度函数。

46、设(ξ,η)的联合分布密度为$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-2(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，（1）.求常数 A;（2）求给定时的条件密度函数。

47、在(0,4)中任取两数，求其积不超过 4 的概率。

48、若(ξ,η) 的分布列是（见下表）(1)求出常数 A; (2)求出 $\xi=2$ 时η的条件分布列。

ξ \ η	-1	0	1
1	1/6	1/8	1/8
2	1/12	1/4	A
3	1/24	1/24	1/24

49、设(ξ,η) 独立的服从$N(0,1)$分布，令$U=\xi+\eta$, $V=\xi-\eta$ ，求(U,V)的联合密度函数及边际密度函数。

50、设随机变量ξ的密度函数为 $P(X)=\begin{cases}4X^3 & 0<X<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，(1).求常数 a，使 P{ξ>a} = P{ξ<a}; (2).求常数 b，使 P{ξ>b} = 0.05。

51、地下铁道列车运行的间隔时间为 2 分钟，旅客在任意时刻进入月台，求候车时间的数学期望及均方差。

52、设二维随机变量(ξ,η)的联合密度函数为：$p(x,y)=\begin{cases}6xy(2-x-y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$， (1)求 $\zeta=2\xi+3$的密度函数；(2)求 $p_{\eta|\xi}(y|x)$; (3) $p\{\eta<\frac{1}{2}|\xi<\frac{1}{2}\}$

53、若二维随机变量(ξ,η)的密度函数为：$P(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，1)求$\delta=\xi+\eta$的密度函数；2)求$P(\xi+\eta<2)$；（3） $P\{\xi<1|\eta<2\}$

54、若$r,v\xi\sim N(a,\sigma^2)$，求$\eta=\dfrac{\xi-a}{\sigma}$ 的密度函数。

55、将两封信随机地往编号为 1,2,3,4 的四个邮筒内投，以ξ_k 表示第k个邮筒内信的数目，求： (1) (ξ_1,ξ_2)的联合分布列； 2)$\xi_2=1$的条件下，ξ_1的条件分布。

56、若$r,v\xi\sim N(0,1)$，求$\eta=\xi^2$的密度函数。

57、某射手在射击中,每次击中目标的概率为$P(0<P<1)$，射击进行到第二次击中目标为止，用ξ_k表示第K次击中目标时射击的次数$(K=1,2)$，求ξ_1和ξ_2的联合分布和条件分布。

58、进行独立重复试验，设每次试验成功的概率为p。将试验进行到出现r次成功为止，以X表示所需试验的次数。求X的分布列。

59、已知某种类型的电子管的寿命X（以小时计）服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

一台仪器中装有 5 只此类型电子管，任一只损坏时仪器便不能正常工作。求仪器正常工作 1000 小时以上的概率。

60、设连续随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-kx}, & x\geq 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，其中 k 为已知常数。求：（1）常数 A;

（2）$P\left\{0\leq X\leq \frac{1}{k}\right\}$。

61、设离散随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

求：（1）X 的分布函数 $F(x)$；

（2）$P\left\{X\leq \frac{3}{2}\right\}$，$P\{1<X\leq 4\}$，$P\{1\leq X\leq 4\}$

62、从一批含有 13 只正品、2 只次品的产品中，不放回地抽取 3 次，每次抽取 1 只，求抽得次品数 X 的分布列及分布函数。

63、（1）设连续随机变量 X 的概率概率为 $f_X(x)$，求 $Y=X^3$ 的概率密度。

（2）设 X 服从指数分布 $E(\lambda)$。求 $Y=X^3$ 的概率密度。]

64、对圆片直径进行测量，测量值 X 服从均匀分布 $U(5,6)$。求圆面积 Y 的概率密度。

65、设电压 $V=A\sin\Theta$，其中 A 是一个正常数，相角 Θ 是一个随机变量，服从均匀分布 $U\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，求电压 V 的概率密度。

66、箱子里装有 12 件产品，其中 2 件是次品。每次从箱子里任取一件产品，共取 2 次。定义随机变量 X,Y 如下 $X=\begin{cases}0, & \text{若第1次取出正品}\\ 1, & \text{若第1次取出次品}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}0, & \text{若第2次取出正品}\\ 1, & \text{若第2次取出次品}\end{cases}$。分别就下面两种情况求出二维随机向量 (X,Y) 的联合分布列和关于 X,Y 的边缘分布列：（1）放回抽样；（2）不放回抽样。

67、一个大袋子中，装有 3 个桔子，2 个苹果，3 个梨。今从袋中随机抽出 4 个水果。若 X 为为桔子数，Y 为苹果数，求 (X,Y) 的联合分布列。

68、把一枚硬币连掷 3 次，以 X 表示在 3 次中出现正面的次数，Y 表示在 3 次中出现正面的次数与出现反面的次数的绝对值，求 (X,Y) 的联合分布列。

69、设二维随机向量的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4\\ 0, & 其它\end{cases}$。求（1）$k$；（2）$P\{X\le 1, Y\le 3\}$；（3）$P\{X\le 1.5\}$；（4）$P\{X+Y\le 4\}$。

70、设随机向量(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}A(R-\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & 其它\end{cases}$，求：（1）常数 A;（2）$(X,Y)$落地圆域$G:x^2+y^2\le r^2$（$r\le R$）中的概率。

71、设二维连续随机向量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}\quad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

求：（1）(X,Y)的分布函数；（2）关于X及关于Y的边缘分布函数。

72、设二维连续随机向量(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & 其它\end{cases}$，求关于$X$及关于$Y$的边缘概率密度。

73、设X与Y相互独立，且X服从均匀分布$U[-a,a]$，Y服从正态分布$N(b,\sigma^2)$。求$Z=X+Y$的概率密度。

74、若(ξ,η,ζ)的密度为($p(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z) & 0\le x,y,z<2\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$，则$\xi,\eta,\zeta$两两独立，但不相互独立。

75、若ξ,η相互独立，且同服从指数分布，密度函数为：$p(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，证明：$\xi+\eta$与$\frac{\xi}{\eta}$相互独立。

76、证明：$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le o\end{cases}$ 为一概率密度函数。

77、设$R,V\xi,\eta$分别服从参数为λ_1、λ_2的普阿松分布，且相互独立，求证：$\tau=\xi+\eta$ 服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的普阿松分布。

78、证明函数$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<\infty)$是一个密度函数。

79、设$F(x)=P\{\xi\le x\}$，试证$F(x)$具有下列性质：（1）非降；（2）右连续；（3）$F(-\infty)=0,$

$F(+\infty)=1$。

80、试证：若 $P\{\xi\le x_2\}\ge 1-\beta$，$P\{\xi\ge x_1\}\ge 1-\alpha$，则 $P\{x_1\le\xi\le x_2\}\ge 1-(\alpha+\beta)$。

81、设随机变量 ξ 取值于[0，1]，若 $P\{x\le\xi<y\}$ 只与长度 $y-x$ 有关（对一切 $0\le x\le y\le 1$），试证 ξ 服从[0，1]均匀分布。

82、定义二元函数 $F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y>0\\ 0, & x+y\le 0\end{cases}$。验证此函数对每个变元非降，左连续，且满足（2.6）及（2.7），但无法使（2.5）保持非负。

83、试证 $f(x,y)=ke^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ 为密度函数的充要条件为 $a>0,\ c>0,\ b^2-ac<0,\quad k=\dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}$。

84、若 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是对应于分布函数 $F_1(x),F_2(x),F_3(x)$ 的密度函数，证明对于一切 $\alpha(-1<\alpha<1)$，下列函数是密度函数，且具有相同的边际密度函数 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$：

$f_1(x),f_2(x),f_3(x)=f_1(x_1),f_2(x_2),f_3(x_3)\{1+\alpha[2F_1(x_1)-1]\times[2F_2(x_2)-1]\times[2F_3(x_3)-1]\}$。

85、设 (ξ,η,ζ) 的联合密度函数为 $p(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z), & \text{当}\begin{matrix}0\le x\le 2\pi\\ 0\le y\le 2\pi\\ 0\le z\le 2\pi\end{matrix}\text{时}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

试证 ξ,η,ζ 两两独立，但不相互独立。

86、若 ξ_1 与 ξ_2 是独立随变量，均服从普要松分布，参数为 $\lambda_1\ \lambda_2$ 及，试直接证明

（1）$\xi_1+\xi_2$ 具有普承松分布，参数为 $\lambda_1+\lambda_2$；

（2）$P\{\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=n\}=\binom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$。

87、若 ξ,η 相互独立，且皆以概率 $\dfrac{1}{2}$ 取值+1 及 -1，令 $\zeta=\xi\eta$，试证 ξ,η,ζ 两两独立但不相互独立。

88、若气体分子的速度是随机向量 $V=(x,y,z)$，各分量相互独立，且均服从 $N=(0,\sigma^2)$，试证 $S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 斑点服从马克斯威尔分布。

89、求证，如果 ξ 与 η 独立，且分别服从 $\Gamma-$分布 $G(\lambda,r_1)$ 和 $G(\lambda,r_2)$，则 $\xi+\eta$ 与 $\dfrac{\xi}{\eta}$ 也独立。

90、证明：ξ 是一个随机变量，当且仅当对任何 $x\in R^{\prime}$ 成立 $\{\omega:\xi(\omega)\in C\}\in F$。

第三章　解答

1、解：令ξ_n表在 n 次移动中向右移动的次数，则ξ_n服从二项分布，

$$P\{\xi_n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0,1,\cdots n$$

以S_n表时刻时质点的位置，则　$S_n = \xi_n - (n-\xi_n) = 2\xi_n - n$。

ξ_n的分布列为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ (1-p)^n & C_n^1 p(1-p)^{n-1} & C_n^2 p^2(1-p)^{n-2} & \cdots & p^n \end{pmatrix}$。

S_n的分布列为 $\begin{pmatrix} -n & -n+2 & -n+4 & \cdots & n \\ (1-p)^n & C_n^1 p(1-p)^{n-1} & C_n^2 p^2(1-p)^{n-2} & \cdots & p^n \end{pmatrix}$。

2、解：$P\{\xi = 1\} = P\{失成\} + P\{成失\} = pq + qp$，

$$P\{\xi = 2\} = P\{失失成\} + P\{成成失\} = ppq + qqp = p^2 q + q^2 p, \cdots$$

所以ξ的概率分布为　$p\{=k\} = p^k q + q^2 p,\ k = 1,2,\cdots$。

3、解：（1）$1 = \sum_{k=1}^{N} f(k) = \frac{c}{N}\cdot N$，　$\therefore c = 1$。

（2）$1 = c\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = c(e^\lambda - 1)$，　$\therefore c = (e^\lambda - 1)^{-1}$。

4、证：$f(x) \ge 0$，且　$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty$

$\therefore f(x)$是一个密度函数。

5、解:（1）$P(6 < \xi < 9) = P\left\{\frac{1}{2}(6-10) < \frac{1}{2}(\xi - 10) < \frac{1}{2}(9-10)\right\}$

$$= P\left\{-1 < \frac{1}{2}(\xi - 10) < \frac{1}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-2) = 0.285788$$

（2）$P(7<\xi<12)=P\left\{\frac{1}{2}(7-10)<\frac{1}{2}(\xi-10)<\frac{1}{2}(12-10)\right\}$

$$=P\left\{-1\frac{1}{2}<\frac{1}{2}(\xi-10)<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1\frac{1}{2})=0.774538$$

（3）$P(13<\xi<15)=P\left\{\frac{1}{2}(13-10)<\frac{1}{2}(\xi-10)<\frac{1}{2}(15-10)\right\}$

$$=P\left\{1\frac{1}{2}<\frac{1}{2}(\xi-10)<2\frac{1}{2}\right\}=\Phi\left(2\frac{1}{2}\right)-\Phi(1\frac{1}{2})=0.060597$$

6、解：（1）$\Phi(1.3)=0.90$，而 $P\{\xi<a\}=P\left\{\frac{1}{2}(\xi-5)<\frac{1}{2}(a-5)\right\}=\Phi\left(\frac{1}{2}(a-5)\right)$，令 $\frac{1}{2}(a-5)=1.3$ 解得 $a=7.6$。

（2）由 $P\{|\xi-5|>a\}=0.01$ 得 $P\{\xi-5>a\}=0.005$，从而 $P\left\{\frac{1}{2}(\xi-5)\le\frac{1}{2}a\right\}$ =0.995，而 $\Phi(2.6)=0.995$ 所以 $\frac{1}{2}a=2.6,\quad a=5.2$。

7、证:（1）设 $x_2>x_1$, $F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<\xi\le x_2\}\ge 0$，所以 $F(x_2)\ge F(x_1)$，$F(x)$ 非降。

（2）设 $x<\cdots<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<x_0$，$x_1\downarrow x$ 由概率的可加性得

$$P\left\{\prod_{i=0}^{\infty}(x_{i+1}<\xi\le x_i)\right\}=P\{x<\xi\le x_0\}\qquad \sum_{i=0}^{\infty}[F(x_i)-F(x_{i+1})]=F(x_0)-F(x)。$$

由此得 $F(x_0)-F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[F(x_0)-F(x)]$,

$\therefore\quad F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n)=F(x+0),\quad F(x)$ 右连续。

（3）$1=P\{-\infty<\xi<\infty\}=\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}P\{n<\xi\le n+1\}=\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}[F(n+1)-F(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}F(n)=\lim\limits_{m\to-\infty}F(m)$。

由单调性得 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ 均存在且有穷，由 $0\le F(x)\le 1$ 及上式得 $F(-\infty)=0,\quad F(\infty)=1$。

8、证：$P\{x_1\le\xi\le x_2\}=P\{\xi\le x_2\}-P\{\xi<x_1\}=P\{\xi\le x_2\}-(1-P\{\xi\le x_2\})$

$$=P\{\xi\le x_2\}+P\{\xi\ge x_1\}-1\ge(1-\beta)+(1-\alpha)-1=1-(\alpha+\beta).$$

∴不等式成立。

9、证法一：定义 $F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0]\\ P\{0\le\xi<x\}, & x\in(0,1]\\ 1, & x\in(1,\infty)\end{cases}$ 则 $F(x)$ 是 ξ 的分布函数。由题设得，对任意 $2x\in[0,1]$ 有 $P\{0\le\xi<x\}=P\{x\le\xi<2x\}$，即有 $P\{0\le\xi<2x\}=2P\{0\le\xi<x\}$。由此得 $F(2x)=2F(x)$。逐一类推可得，若 $nx\in[0,1]$，则 $F(nx)=nF(x)$，或者 $\frac{1}{n}F(x)=F(\frac{x}{n})$。从而对有理数 $\frac{m}{n}$，若 $\frac{m}{n}x$ 与 x 都属于[0,1]，则有 $F\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}F(x)$。再由 $F(x)$ 的左连续性可得，对任意无理数 a，若 ax 与 x 都属于[0,1]，则 $F(ax)=aF(x)$。

因为区间 $[0,1)$ 与[0,1]的长度相等，由题设得

$$F(1)=P\{0\le\xi<1\}=P\{0\le\xi\le1\}=1.$$

由此及上段证明得，对任意 $x\in[0,1]$ 有 $F(x)=xF(1)=x$，即 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le0\\ x, & 0<x\le1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

∴ ξ 服从[0,1]上均匀分布。

证法二：如同证法一中定义 ξ 的分布函数 $F(x)$，由 $F(x)$ 单调知它对[0,1]上的 L－测试几乎处处可微。设 $x_1,x_2\in(0,1)$，当 $x_i+\Delta x\in[0,1](i=1,2)$ 时，由题设得

$$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=P\{x_1\le\xi<x_1+\Delta x\}$$

$$=P\{x_2\le\xi<x_2+\Delta x\}=F(x_2+\Delta x\}-F(x2)$$

等式两端都除以 Δx，再令 $\Delta x\to0$ 可得，由 $F'(x_1)$ 存在可推得 $F'(x_2)$ 也存在，而且 $F'(x_2)=F'(x_1)$。从而对任意 $x\in(0,1)$ 有 $F'(x)\equiv c$。当 $x\,\overline{\in}\,[0,1]$ 时显然有 $F'(x)=0$。一点的长度为 0，由题设得 $P\{\xi=0\}=P\{\xi=1\}=0$。由上所述可知 ξ 是连续型随机变量，$F'(x)$ 是其密度函数，从而定出 $c=1$。至此得证 ξ 服从[0,1]均匀分布。

10、证：（1）$f_\sigma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m_0)^2+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right\}=exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}-ln\sigma-ln\sqrt{2\pi}\right\}$$

若令 $Q(\sigma)=\dfrac{-1}{(2^2)}$， $T(x)=(x-m_0)^2$， $D(\sigma\_=-\ln\sigma$， $S(x)=-\ln\sqrt{2\pi}$，则有

$$f_\sigma(x)=\exp\{Q(\sigma)T(x)+D(\sigma)+S(x)\}$$

这就证明了正态分布 $M(m_0,\sigma^2)$ 是单参数 $\sigma(\sigma>0)$ 的指数族。

（2） $f_m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma_0{}^2}\right\}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\exp\left\{-\frac{x^2-2mx+m^2}{2\sigma^2}\right\}=\exp\left\{\frac{mx}{\sigma_0{}^2}-\frac{m^2}{2\sigma_0{}^2}-\frac{x^2}{2\sigma_0{}^2}+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right\}$$

若令 $Q(m)=\dfrac{m}{\sigma_0{}^2}$， $T(x)=x,\ D(m)=\dfrac{-\frac{1}{2}m^2}{\sigma_0{}^2}$， $S(x)\equiv\dfrac{x^2}{2\sigma_0{}^2}+\ln\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}$，则

$$f_m(x)=\exp\{Q(m)T(x)+D(m)+S(x)\}$$

所以正态分布 $N(m,\sigma_0{}^2)$ 是单参数 $m(-\infty<m<\infty)$ 的指数族。

（3） $p(k;\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\exp\{k\ln\lambda-\lambda-\ln k!\}$。

若令 $Q(\lambda)=\ln\lambda,\ T(k)=k,\ D(\lambda)=-\lambda,\ S(k)=-\ln k!$，则

$p(k;\lambda)=\exp\{Q(\lambda)T(k)+D(\lambda)+S(k)\}$，所以 $p(k;\lambda)$ 是单参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数族。

（4）关于 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，其密度函数为 $f_\theta(x)=\begin{cases}1/\theta, & 0\le x\le\theta\\ 0, & x>\theta\text{ 或 }x>0\end{cases}$

$f_\theta(x)$ 是定义在 $-\infty<x<\infty$ 的函数，由于它是 x 的分段表示的函数，所以无法写成形式 $f_\theta(x)=\exp\{Q(\theta)T(x)+D(\theta)+S(x)\}$，故 $f_\theta(x)$ 关于 θ 不是一个单参数的指数族。

11、证：必要性：

$$\iint f(x,y)dxdy=\iint ke^{-a(x+\frac{b}{a}y)^2}\cdot e^{-\frac{ac-b^2}{a}y}dxdy$$

令 $u=x+\dfrac{b}{a}y,\ v=y$，得 $y=v,\ x=u-\dfrac{b}{a}v,\ J=1$。设

$$\iint f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}ke^{-au^2}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ac-b^2}{a}v^2}dv$$

要积分收敛，必须 $a>0,\ (ac-b^2)/a>0$，由此得应有 $ac-b^2>0$ 以及 $c>0$。利用

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-au^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac-b^2}{a}v^2} dv = k \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ac-b^2}} \sqrt{\pi} = 1$$

$\therefore \quad k = \dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}$

从而题中所列条件全部满足。以上诸步可逆推，充分性显然。

12、**解**：设 $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) + h(x,y)$ 是密度函数，则由 $f(x,y) \ge 0$ 得 $h(x,y) \ge -f_1(x)f2(y)$。又

$$1 = \iint f(x,y)dxdy = \int f_1(x)dx \int f_2(y)dy + \iint h(x,y)dxdy = 1 + \iint h(x,y)dxdy,$$

所以应有 $\iint h(x,y)dxdy = 0$。

反之，若 $h(x,y) \ge -f_1(x)f2(y)$，$h(x,y)$ 可积且 $\iint h(x,y)dxdy = 0$，显然有 $f(x,y) \ge 0$ 且 $\iint f(x,y)dxdy = 1$，即 $f(x,y)$ 是密度函数。

所以为使 $f(x,y)$ 是密度函数，$h(x,y)$ 必须而且只需满足 $h(x,y) \ge -f_1(x)f2(y)$ 且 $\iint h(x,y)dxdy = 0$。

13、**解**：（1）$1 = \int_0^{\infty} Ae^{-2x}dx \int_0^{\infty} e^{-y}dy = A\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty} \cdot \left(-e^{-y}\mid_0^{\infty}\right) = \frac{A}{2}$，$A = 2$

（2）$P\{\xi < 2, \eta < 1\} = \int_0^2 2e^{-2x}dx \int_0^1 e^{-y}dy = \left(-e^{-2x}\mid_0^2\right)\left(-e^{-y}\mid_0^1\right) = (1-e^{-4})(1-e^{-1})$。

（3）ξ 的边际分布，当 $x \le 0$ 时 $f\xi(x) = 0$，当 $x > 0$ 时有

$$f_{\xi}(x) = \int_0^{\infty} 2e^{-2x}e^{-y}dy = 2e^{-2x}.$$

（4）$P\{\xi + \eta < 2\} = \int_0^2 2e^{-2x}dx \int_0^{2-x} e^{-y}dy$

$$= \int_0^2 2e^{-2x}(1-e^{-(2-x)})dx \int_0^2 (2e^{-2x} - 2e^{-(2+x)})dx$$

$$= (1-e^{-4}) + (2e^{-4} - 2e^{-2}) = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} = (1-e^{-2})^2.$$

（5）当 $x < 0, y > 0$ 时 $f(x \mid y) = 0$；当 $x > 0, y > 0$ 时有

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_{\eta}(y)} = \frac{2e^{-(2x+y)}}{e^{-y}} = 2e^{-2x}.$$

（6）$P\{\eta < 1\} = \int_0^1 dy \int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dx = \int_0^1 e^{-y}dy \int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dx = -e^{-y}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1}$，

利用（2）的结果可得

$$P\{\xi<2,\eta<1\}=\frac{P\{\xi<2,\eta<1\}}{P\{\eta<1\}}=\frac{(1-e^{-4})(1-e^{-1})}{1-e^{-1}}=1-e^{-4}.$$

14、证：设多项分布为

$$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_r=k_r\}=\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}p_1^{k_1}\cdots p_1^{k_r}, \tag{1}$$

$$k_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{r}k_i=n,\ \sum_{i=1}^{r}p_i=1。 \tag{2}$$

利用（2）可以把（1）改写成

$$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-1}=k_{r-1}\}=$$

$$=\frac{n!}{k_1!\cdots k_{r-1}!(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}p_1^{k_1}\cdots p_1^{k_r}\times(1-p_1-\cdots-p_{r-1})^{n-k_1-\cdots-k_{r-1}} \tag{3}$$

由边际分布的定义并把（3）代入得

$$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-2}=k_{r-2}\}=\sum_{\substack{k_{r-1}\\ k_1+\cdots+k_{r-1}\le n,k_{r-1}\ge 0}}P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-1}=k_{r-1}\}$$

$$=\frac{n!\,p_1^{k_1}\cdots p_{r-2}^{k_{r-2}}}{k_1!\cdots k_{r-2}!(n-k_1-\cdots-k_{r-2})!}\times\sum_{k_{r-1}=0}^{n-k_1-\cdots-k_{r-2}}\frac{(n-k_1-\cdots-k_{r-2})!}{k_{r-1}!(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}p_{r-1}^{k_{r-1}}\times$$

$$\times(1-p_1-\cdots-p_{r-2}p_{r-1})^{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}$$

由二项式定理得

$$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-2}=k_{r-2}\}=$$

$$=\frac{n!}{k_1!\cdots k_{r-2}!(n-k_1-\cdots-k_{r-2})!}p_1^{k_1}\cdots p_{r-2}^{k_{r-2}}\times(1-p_1-\cdots-p_{r-2})^{n-k_1-\cdots-k_2} \tag{4}$$

把（4）与（3）比较知，边际分布仍服从多项分布。多次类推可得

$$P\{\xi_1=k_1\}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}$$

从而知任意边际分布均服从多项分布（包括二项分布）。

15、解：（1）ξ 的密度函数为，当 $x\le 0$ 时 $p_\xi(x)=0$；当 $x>0$ 时，注意积分取胜有选取，得

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy-\int_x^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\times x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}\sigma^{-y}dy\quad(令y-x=1)$$

$$=\frac{x^{k_1-1}}{\Gamma(k_1)\Gamma(_2)}\int_0^{\infty}t^{k_2-1}e^{-x}e^{-t}dt=\frac{x^{k_1-1}}{\Gamma(k_1)}e^{-x}.$$

（2）η 的密度函数为，当 $y\le 0$ 时 $p_\eta(y)=0$；当 $y>0$ 时，

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx-\int_{x}^{y}\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\times x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}\sigma^{-y}dx$$

令 $x=yt$，当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=y$ 时 $t=1$，所以

$$p_\eta(y)=\frac{e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}y^{k_1-1}y^{k_2-1}\times\int_0^1 t^{k_1-1}(1-t)^{k_2-1}ydt$$

$$=\frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\cdot B(k_1,k_2)=\frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\cdot\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1+k_2)}=\frac{1}{\Gamma(k_1+k_2)}y^{k1+k_2-1}\ e^{-y}$$

其中用到 $\beta-$ 函数与 $\Gamma-$ 函数的关系式。

16、证：我们有

$$0\le F_i(x_i)\le 1,\qquad 1\le 2f_i(x_i)-1\le 2-1=1,$$

$$-1\le[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1][2F_3(x_3)-1]\le 1,$$

代入 $f_\alpha(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式得 $f_\alpha(x_1,x_2,x_3)\ge 0$ （1）

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}[2F_i(x_i)-1]f_i(x_i)dx_i=\int_{-\infty}^{\infty}[2F_i(x_i)-1]dF_i(x_i)=\left[F_1^2(x_i)-F_i(x_i)\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$\therefore\iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{\infty}f_3(x_3)dx_3=1 \qquad (2)$$

由（1），（2）知 $f_\alpha(x_1,x_2,x_3)$ 是密度函数。用与上面类似的方法计算可得边际密度函数为

$$\therefore\iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3=f_1(x_1),\qquad \iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2=f_3(x_3)$$

$$\iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3=f_2(x_2).$$

17、解：

（1）为求 (ζ,ξ) 的联合概率分布，分别考虑下列三种情况：$(i,k\ge 1)$ 其中利用到独立性。

（a） $i=k$

$$P\{\zeta=k,\xi=k\}=P\left\{\bigcup_{j=1}^{k}(\xi=k,\eta=j)\right\}=\sum_{j=1}^{k}P\{\xi=k,\eta=j\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}p^2q^{k+j=2}=p^2q^{k-1}\cdot\frac{1-q^k}{1-q}=pq^{k-1}(1-q^k);$$

(b) $i<k$

$$P\{\zeta=k,\xi=i\}=P\{\xi=i,\eta=k\}=p^2q^{1+k-2};$$

(c) $i>k$

$$\{\zeta=k,\xi=i\}=\phi,\ P\{\zeta=k,\xi=i\}=0$$

(2)因为$=\max(\xi,\eta)$，所以

$$\{\zeta=k\}=\bigcup_{i=1}^{k-1}\{\xi=i,\eta=k\}\cup\bigcup_{j=1}^{k}\{\xi=k,\eta=j\}$$

$$P\{\zeta=k\}=\sum_{i=1}^{k-1}P\{\xi=i,\eta=k\}+\sum_{j=1}^{k}P\{\xi=k,\eta=j\}=\sum_{i=1}^{k-1}p^2q^{1+k-2}+\sum_{j=1}^{k}p^2q^{k+j-2}$$

$$=p^2q^{k-1}\left[\frac{1-q^{k-1}}{1-q}+\frac{1-q^k}{1-q}\right]=(2-q^{k-1}-q^k)pq^{k-1}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

（3） $P\{\xi=i\mid\zeta=k\}=\dfrac{P\{\xi=i,\zeta=k\}}{P\{\zeta-k\}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{pq^{k-1}(1-q^k)}{pq^{k-1}(2-q^{k-1}q^k)}=\dfrac{1-q^k}{2-q\kappa-1}q^k, & i=k\\ \dfrac{p^2q^{1+k-2}}{pq^{k-1}(2-q^{k-1}q^k)}=\dfrac{pq^{i-1}}{2-q\kappa-1}q^k, & i<k\end{cases}\qquad i>k,(i,k\geq 1)$$

18、解:（1）边际分布的密度函数为，当$x\overline{\in}[0.1]$时$f_\xi(x)=0$；当$0\leq x\leq 1$时，

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 4xydy=2x$$

同理，当$y\overline{\in}[0.1]$时$f_\eta(y)=0$；当$0\leq y\leq 1$时$f_\eta(y)=2y$。$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$，所以ξ与η独立。

（2）边际密度函数为，当$x\overline{\in}[0.1]$时$f_\xi(x)=0$；当$0<x<1$时

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 8xydy=4x(1-x^2)$$

当$y\overline{\in}[0.1]$时$f_\eta(y)=0$；当$0\leq y\leq 1$时

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)dx=\int_0^1 8xydx=4y^2$$

在区域$0<y<1$中均有$g(x,y)\neq f_\xi(x)f_\eta(y)$，所以$\xi$与$\eta$不独立。

19、证：当$0\leq x\leq 2\pi$，$0\leq y\leq 2\pi$时 ，ξ与η的联合分布密度为

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3(1-\sin x\sin y\sin z)dz}=\left[\frac{z}{8\pi^3}-\sin x\sin y(-\cos z)\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi^2};$$

其余$p_{\xi\eta}(x,y)=0$。当$0\leq x\leq 2\pi$时，

$$p_{\xi\eta}(x)=\int_0^{2\pi}dy\int_0^2\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)dz=\frac{1}{2\pi};$$

其余$p_\xi(x)=0$。由于ξ,η,ζ三者在密度函数的表达式中所处地位相同，故得当

$0 \le x \le 2\pi$，$0 \le z \le 2\pi$ 时，$p_{\xi\zeta}(x,z) = 1/4\pi^2$；当 $0 \le y \le 2\pi$，$0 \le z \le 2\pi$ 时，$p_{\eta\zeta}(y,z) = 1/4\pi^2$；当 $0 \le y \le 2\pi$ 时，$p_\eta(z) = 1/2\pi$；当 $0 \le z \le 2\pi$ 时，$p_\zeta(z) = 1/2\pi$；在其余区域内，诸边际密度函数均取 0 值。由于 $p_{\xi\eta}(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$，$p_{\xi\zeta}(x,z) = p_\xi(x)p_\zeta(z)$，$p_{\eta\zeta}(y,z) = p_\eta(y)p_\zeta(z)$，故 ξ,η,ζ 两两独立；但当 $0 < x < 2\pi$，$0 < y < 2\pi, 0 < z < 2\pi$ 时有 $p(x,y,z) \ne p_\xi(x)p_\eta(y)p_\zeta(z)$，故 ξ,η,ζ 不相互独立。

20、证：当 $|x| < 1$ 时，$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_{-1}^{1} \frac{1+xy}{4} dy = \frac{1}{2}$，

其余 $p_\xi(x) = 0$。同理当 $|y| < 1$ 时，$p_\eta(y) = 1/2$ 其余 $p_\eta(x) = 0$ 当 $0 < |x| < 1$，$0 < y < 1$ 时有 $p(x,y) \ne p_\xi(x)p_\eta(y)$，所以 ξ 与 η 不独立。

现试能动分布函数来证 ξ^2 与 η^2 独立。ξ^2 的分布函数记为 $F_1(x)$，则当 $0 < x \le 1$ 时，

$$F_1(x) = P\{\xi^2 < x\} = P\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{x};$$

同理可求得 η^2 的分布函数 $F_2(y)$，得

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1, \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \sqrt{y}, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

(ξ^2, η^2) 联合分布函数记为 $F_3(x,y)$，则当 $0 \le x \le 1,\ y \ge 1$ 时

$$F_3(x,y) = P\{\xi^2 < x, \eta^2 < y\} = P\{\xi^2 < x\} = \sqrt{x}$$

同理得当 $0 \le y \le 1, x \ge 1$ 时 $F_3(x,y) = \sqrt{y}$；当 $0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$ 时

$$F_3(x,y) = P\{\xi^2 < x, \eta^2 < y\} = P\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}, -\sqrt{y} < \eta < \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} ds \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1+st}{4} dt = \sqrt{xy}$$

合起来写得
$$F_2(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ 或 } y \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 1, y \ge 1 \\ \sqrt{y}, & 0 \le y \le 1, x \ge 1 \\ \sqrt{xy}, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 1, & x \ge 1, y \ge 1 \end{cases}$$

不难验证 $F_3(x,y) = F_1(x)F_2(y)$ 对所有 x,y 都成立，所以 ξ^2 与 η^2 独立。

21、证：（1）由褶积公式及独立性得

$$P\{\xi_1+\xi_2=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i,\xi_2=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i\}P\{\xi_2=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-1)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-1}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

这就证明了$\xi_1+\xi_2$具有普阿松分布，且参数为$\lambda_1+\lambda_2$

（2）$P\{\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=n\}=\dfrac{P\{\xi_1=k,\xi_1+\xi_2=n\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}$

$$=\frac{P\{\xi_1=k,\xi_2=n-k\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}=\frac{P\{\xi_1=k\}P\{\xi_2=n-k\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}$$

$$=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\div\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$ 证毕。

22、证：由题设得

$$P\{\xi=1\}=P(\{\xi=1,\eta=1\}\cup(\xi=-1,\eta=-1\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$P\{\xi=-1\}=P(\{\xi=1,\eta=-1\}\cup(\xi=-1,\eta=1\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

$$P\{\xi=1,\zeta=1\}=P(\{\xi=1\}\cap[\{\xi=1,\eta=1\}\cup(\xi=-1,\eta=-1\}])$$

$$=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{4}=P\{\xi=1\}P\{\zeta=1\},$$

$$P\{\xi=1,\zeta=-1\}=P(\{\xi=1\}\cap[\{\xi=1,\eta=-1\}\cup(\xi=-1,\eta=1\}])$$

$$=P\{\xi=1,\eta=-1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=-1\}=\frac{1}{4}=P\{\xi=1\}P\{\zeta=-1\},$$

同理可证 $P\{\xi=-1,\zeta=1\}+P\{\xi=-1\}P\{\zeta=1\}$，$P\{\xi=-1,\zeta=-1\}+P\{\xi=-1\}P\{\zeta=-1\}$.

所以ξ与ζ相互独立。用同样的方法可片η与ζ也相互独立。但

$$P\{\xi=1,\eta=1,\zeta=1\}=P(\{\xi=1,\eta=1\}\cap[\{\xi=1,\eta=1\}\cup\{\xi=-1,\eta=-1\}]),$$

$$P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}P\{\zeta=1\}=\frac{1}{8},$$

所以ξ,η,ζ只两两独立而不相互独立。

23、解：$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2\cdots$，

由此得（1）$P\{\eta=ak+b\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2\cdots$，

（2）$P\{\eta=k^2\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2\cdots$。

24、解：（1）由$P\{\xi=0\}=0$知，η以概率1取有限值。当$y>0$时，

$$F_\eta(y)=P\left\{\frac{1}{\xi}<y\right\}=P\{\xi<0\}+P\left\{\xi>\frac{1}{y}\right\}=\int_{-\infty}^{0}p(x)dx+\int_{\frac{1}{y}}^{\infty}p(x)dx;$$

当$y<0$时，

$$F_\eta(y)=P\left\{\frac{1}{\xi}<y\right\}=P\left\{\frac{1}{y}<\xi<0\right\}=\int_{\frac{1}{y}}^{0}p(x)dx;$$

当$y=0$时，

$$F_\eta(y)=\int_{-\infty}^{0}p(x)dx。$$

（2）$F_\eta(y)=P\{tg\xi<y\}=P\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\{k\pi-\frac{\pi}{2}<\xi<k\pi+arctg\, y\}\right)\quad=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{k\pi-\pi}{2}}^{k\pi+arctg\, y}p(x)dx$

（3）当$y\le 0$时，$F_\eta(y)=0$；当$y>0$时，

$$F_\eta(y)=P\{|\xi|<y\}=P\{-y<\xi<y\}=\int_{-y}^{y}p(x)dx。$$

25、解：设直径为随机变量d，则

$$p_d(x)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

圆面积$S=\frac{1}{4}\pi d^2$。当$\frac{1}{4}\pi a^2<y\le\frac{1}{4}\pi b^2$时，

$$F_a(y)=P\{S<y\}+P\left\{\frac{1}{4}\pi d^2<y\right\}=P\left\{d<\sqrt{\frac{4y}{\pi}}\right\}=\int_a^{\sqrt{\frac{4y}{\pi}}}\frac{1}{b-a}dx;$$

当 $y \le \frac{1}{4}\pi a^2$ 时 $F_a(y)=0$；当 $y>\frac{1}{4}\pi b^2$ 时 $F_a(y)=1$。由此对 $F_a(y)$ 求导（利用对参数积分求导法则）

得圆面积的分布密度为，当 $y \le \frac{1}{4}\pi a^2$ 或 $y>\frac{1}{4}\pi b^2$ 时 $p_a(y)=0$；当 $\frac{1}{4}\pi a^2 < y \le \frac{1}{4}\pi b^2$ 时

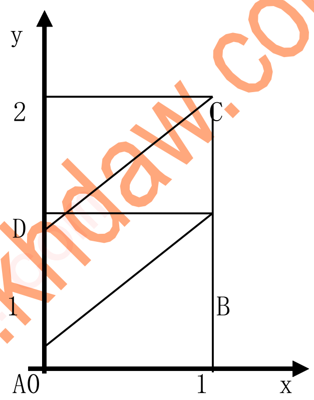
$$p_a(y)=F'a(y)=\frac{\sqrt{\pi y}}{(b-a)\pi y}。$$

26、解：ξ 与 η 的密度函数为

$$p_\xi(x)=p_\eta(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad (1)$$

由卷积公式及独立性得 $\zeta=\xi+\eta$ 的分布密度函数为

$$p_\zeta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)p_\eta(y-x)dx \qquad (2)$$



把（2）与（1）比较知，在（2）中应有 $0\le x\le 1$，$0\le y-x\le 1$，满足此不等式组的解 (x,y) 构成图中平面区域平形四边形 ABCD，当 $0\le y\le 1$ 时 $0\le x\le y$，当 $1\le y\le 2$ 时 $y-1\le x\le 1$。所以当 $0\le y\le 1$ 时（2）中积分为 $p_\zeta(y)=\int_0^y 1\times 1dx=y$

当 $1\le y\le 2$ 时，（2）中积分为 $p_\zeta(y)=\int_{y-1}^{1}1\times 1dx=2-y$；

对其余的 y 有 $p_\zeta(y)=0$。

27、解：$p_\xi(x)=p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$，　　$p_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

由求商的密度函数的公式得

$$p_\zeta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,p(xy,x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2y^2+x^2)}dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{1}{2}x^2(1+y^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}\left[-e^{-\frac{1}{2}x^2(1+y^2)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\pi(1+y^2)}, \qquad -\infty<y<+\infty$$

$\zeta=\frac{\xi}{\eta}$ 服从柯西分布。

28、**解**：作变换，令 $s=x+y,\ t=x-y$，得 $x=\frac{1}{2}(s+t), y=\frac{1}{2}(s-t), |J|=\frac{1}{2}$。由 ξ 与 η 独立知，它们的联合密度应是它们单个密度的乘积，由此得 U，V 的联合密度函数为

$$p_{UV}(s,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot|J|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{s+t}{2}\right)^2+\left(\frac{s-t}{2}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(s^2+t^2)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}=p_U(s)p_V(t)$$

所以 U, V 两随机变量也相互独立，且均服从 N（0，2）。

29、**解**：当 $y>0$ 时由独立性得

$$1-F_\eta(y)=P\{\eta\ge y\}=P\{\xi_1\ge y,\xi_2\ge y,\cdots,\xi_n\ge y\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P\{\xi_1\ge y\}=\prod_{i=1}^{n}(1-F_{\xi_i}(y))=\prod_{i=1}^{n}(e^{-\lambda_i y})=\exp(-y\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$$

$$\therefore F_\eta(y)=1-\exp\left(-y\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$$

当 $y\le 0$ 时 $F_\eta(y)=0$。求导得 η 的密度函数为，当 $y\le 0$ 时 $p_\eta(y)=0$；当 $y>0$ 时

$$p_\eta(y)=F_\eta'(y)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\exp\left(-y\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right).$$

30、**解**：设 $(0,a)$ 在内任意投两点 ξ_1,ξ_2，其坐标分别为 x,y，则 ξ_1,ξ_2 的联合分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin(0,a)\times(0,a)\\ \frac{1}{a^2}, & (x,y)\in(0,a)\times(0,a)\end{cases}。$$

设 $\eta=|\xi_1-\xi_2|$，则 η 的分布函数为，当 $z\le 0$ 时 $F_\eta(z)=0$；当 $z>a$ 时 $F_\eta(z)=1$；当 $0<z\le a$ 时，

$$F_\eta(z)=P\{|\xi_1-\xi_2|<z\}=\iint\limits_{\substack{-z<x-y<z\\0<x,\ y<a}}p(x,y)dxdy=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{\substack{-z<x-y<z\\0<x,\ y<a}}dxdy=\frac{1}{a^2}S,$$

积分 S 为平面区域 ABCDEF 的面积，其值为 $a^2-(a-z)^2=2az-z^2$，所以

$$F_\eta(z)=(2az-z^2)/a^2.$$

31、**证**：由独立性得，$V=(x,y,z)$ 的概率密度为 $p(x,y,z)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}$

$S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的分布函数为，当 $s>0$ 时，

$$F(s)=P\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<s\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2<s^2}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y+z^2)}dxdydz$$

作球面坐标变换，$x=\rho\cos\theta\sin\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=\rho\cos\varphi$，则$|J|=\rho^2\sin\varphi$，

$$F(s)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2}\rho^2/\sigma^2}\times\rho^2d\rho$$

$$=2\pi\cdot 2\int_0^{a}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2}\rho^2/\sigma^2}\cdot\rho^2d\rho$$

由此式对 s 求导可得，当$s>0$时，S 的密度函数为

$$F'(s)=f(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right).$$

32、证:（3.14）式为

$$p(x)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}x^{\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x},\qquad x>0。$$

令$y=\sqrt{\frac{x}{n}}$，则$x=ny^2$，$x'_y=2ny$，由$p(y)=p[f^{-1}(y)]|[f^{-1}(y)]'|$得，$\sqrt{\frac{\eta}{n}}$的密度函数为，当$y>0$时

$$p_{\sqrt{\eta/n}}(y)=\frac{(ny^2)^{\frac{1}{2}n-1}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}ny^2}\cdot 2ny=\frac{2n^{\frac{1}{2}n}y^{n-1}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}ny^2}$$

ξ与$\sqrt{\frac{\eta}{n}}$仍独立。记$T=\xi/\sqrt{\eta/n}$，则由商的密度函数公式得 T 的密度函数为

$$p_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|p_\xi(ty)p_{\sqrt{\eta/n}}(y)dy=\int_0^{\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2y^2}\times\frac{2n^{\frac{1}{2}n}y^{n-1}e^{-\frac{1}{2}ny^2}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}dy$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\times(y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)-1}e^{-\frac{1}{2}y^2(n+t^2)}dy^2,$$

令$u-y^2(n+t^2)$，则$dy^2=\frac{du}{(n+t^2)}$，得

$$p_T(t)=\frac{n^{\frac{1}{2}n}(n+t^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\times\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}(n+1)=1}e^{-\frac{1}{2}u}du$$

$$=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}(n+t^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

$$\therefore p_T(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\qquad -\infty<t<\infty$$

33、**解**：U 的分布函数为，当 $t\le 0$ 时 $F(t)=0$；当 $t>0$ 时有

$$F(t)=\iiint\limits_{x+y+z<t}p(x,y,z)dxdydz=\int_0^t dx\int_0^{t-x}dy\int_0^{t-x-y}\frac{6}{(1+x+y)^4}dz$$

$$=\frac{-2}{(1+t)^3}\cdot\frac{t^2}{2}+\int_0^t dx\int_0^t\frac{2}{(1+x+y+z)^3}dy$$

$$=\frac{-t^2}{(1+t)^3}-\frac{t}{(1+t)^2}+\int_0^t dx\int_0^t\frac{1}{(1+x)^2}dx=1-\frac{1}{t+1}-\frac{t}{(1+t)^2}-\frac{t^2}{(1+t)^3}$$

对 $F(t)$ 求导可得 U 的密度函数为，当 $t\le 0$ 时 $p(t)=0$；当 $t>0$ 时 $p(t)=\dfrac{3t^2}{(1+t)^4}$。

34、**证**：（U，V）联合分布函数为

$$F(u,v)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

当 $s>0$ 时作变换，$s=x^2+y^2$，$t=\dfrac{x}{y}$，反函数有两支

$$\begin{cases}x=t\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\\ y=\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}x=-t\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\\ y=-s\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\end{cases}$$

$$J^{-1}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\end{vmatrix}=-\frac{2x^2}{y^2}-2=-2(t^2+1)，\ |J|=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

考虑到反函数有两支，分别利用两组

$$F(u,v)=\left\{\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v,\ y>0}}+\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v,\ y>0}}\right\}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=2\int_0^u\int_{-\infty}^v\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}s}\cdot\frac{1}{2(1+t^2)}dt$$

对 $F(u,v)$ 求导，得（U，V）的联合密度为（其余为 0）

$$p(u,v)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\cdot\frac{1}{\pi(1+v^2)},\qquad u>0,\ 0<v<\infty$$

若令 $p_U(u)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}(u>0),\quad p_V(v)=\frac{1}{\pi(1+v^2)}\qquad(-\infty<v<\infty)$，

则 U 服从指数分布，V 服从柯西分布，且 $p(u,v)=p_U(u)\times p_V(v)$，所以 U，V 两随机变量独立。

35、证：当 $x>o$ 时，ξ 与 η 的密度函数分别为

$$p_\xi(x)=\frac{\lambda^{r_1}}{\Gamma(r_1)}x^{r_1-1}e^{-\lambda x},\quad p_\eta(x)=\frac{\lambda^{r_2}}{\Gamma(r_2)}x^{r_2-1}e^{-\lambda x};$$

当 $x\le 0$ 时，$p_\xi(x)=p_\eta(x)=0$。设 $U=\xi+\eta,\ V=\frac{\xi}{\eta}$。当 $s\le 0$ 或 $t\le 0$ 时，（U，V）联合密度为

$p(s,t)=0$；当 $s>0,t>0$ 时，作变换 $s=x+y,\ t=\frac{x}{y}$，得 $x=\frac{st}{(1+t)}$，$y=\frac{s}{(1+t)}$ 而

$|J|=\frac{s}{(1+t)^2}$，所以

$$p(s,t)=\frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}x^{r_1-1}y^{r_2-1}e^{-\lambda(x+y)}|J|$$

$$=\frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left(\frac{st}{1+t}\right)^{r_1-1}\left(\frac{s}{1+t}\right)^{r_2-1}e^{-\lambda s}\frac{s}{(1+t)^2}$$

$$=\left[\frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}s^{r_1+r_2-1}e^{-\lambda s}\right]\times\left[\frac{\Gamma(r_1+r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\cdot\frac{t^{r_1-1}}{(1+t)^{r_1+r_2}}\right]=p_U(s)p_V(t)$$

由此知 U 服从分布服从分布，且 U 与 V 相互独立。

36、解：令 $U=\xi+\eta,\ V=\dfrac{\xi}{(\xi+\eta)}$，当 $s\le 0$ 或 $t\notin(0,1)$ 时，U，V 联合密度 $p(s,t)=0$；当 $s>0$ 且 $t\in(0,1)$ 时作变换 $s=x+y,\ \ y=\dfrac{x}{(x+y)}$，则 $x=st,\ \ y=s-st,\ |J|=s$，

$$p(s,t)=e^{-x}e^{-y}\,|J|=se^{-(x+y)}=se^{-s}\cdot 1=p_U(s)p_V(t)$$

由此得 U 服从 $\Gamma-$ 分布 $G(1,2)$，V 服从(0, 1)分布，且 U 与 V 相互独立。

37、解：

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-n)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

设 $U_i=\xi+\eta,V_i=\xi-\eta;\ U=U_1-a-b,\ \ V=V_1-a+b$。作变换 $s=x+y-a-b$，$t=x-y-a+b$ 则 $x-a=\dfrac{1}{2}(s+t)$，$y-b=\dfrac{1}{2}(s-t)$，$|J|=\dfrac{1}{2}$。U，V 的联合密度函数为

$$f(s,t)=p(x,y)\,|J|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(s+t)^2}{4\sigma_1^2}-\frac{2r(s+t)(s-t)}{4\sigma_1\sigma_2}+\frac{(s-t)^2}{4\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{8(1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[s^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\right)+t^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\right)+2st(\sigma_2^2-\sigma_1^2)\right]\right\}$$

设 U，V 的边际分布密度函数分别为 $f_U(s),f_V(t)$，欲 U 与 V 独立，必须且只需 $f(s,t)=f_U(s)\cdot f_{V(t)}$，由 $f(s,t)$ 的表达式可知，这当且仅当 $\sigma_2^2-\sigma_1^2=0$ 时成立。U，V 相互独立与 U_i,V_i 相互独立显然是等价的，所以 $U_i=\xi+\eta,V_i=\xi-\eta$ 相互独立的充要条件是 $\sigma_1=\sigma_2$。当 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 时，得

$$f_U(s)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi(1+r)}}\exp\left\{-\frac{s^2}{4(1+r)\sigma^2}\right\},\quad f_V(t)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi(1-r)}}\exp\left\{-\frac{s^2}{4(1+r)\sigma^2}\right\}$$

$U\sim N(0,2(1+r)\sigma^2),\ \ V\sim N(0,2(1-r)\sigma^2)$。

38、解：（1）因为指数中二次项 x^2,y^2,xy 的系数分别为 $-1,-\dfrac{1}{2},-1$，所以与(2.22)式（见上题解答）比较知，可设其配方后的形式为

$$-1\cdot(x+s)^2-\frac{1}{2}(y+t)^2-1\cdot(x+s)(y+t)。$$

比较系数得 $\begin{cases} -2s-t=11 \\ -s-t=7 \\ -s^2-\frac{1}{2}t^2-st=32\frac{1}{2} \end{cases}$

此方程组有唯一解 $s=-4,t=-3$，由此得

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\left[x-4)^2+\frac{1}{2}(y-3)^2+(x-4)(y-3)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\cdot 1\cdot\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\frac{1}{2})}\left[(x-4)^2+\frac{(y-3)^2}{2}+2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(x-4)(y-3)}{1\cdot\sqrt{2}}\right]\right\}$$

（2）与（2.22）式比较得，$a=4,b=3,\sigma_1=1,\sigma_2=2,r=-\frac{1}{\sqrt{2}}$。

（3） $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-4)^2}{2}\right\}$， $p_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-3)^2}{4}\right\}$。

（4）$p(x\mid y)=\frac{p(x,y)}{p_2(y)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left[x-\left(-\frac{1}{2}y+5\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}$，它服从 $N\left(-\frac{1}{2}y+5\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。

39、解：$|B^{-1}|=27,\ |B|=\frac{1}{|B^{-1}|}=\frac{1}{27}.$

$$p(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)^{\tau}\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}r_{jk}(x_1-a_1)(x_k-a_k)\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{27}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(7x^2+4y^2+2z^2+6xy+4xz+2yz)\right\}.$$

(ξ_1,ξ_2) 的边际密度函数为（积分时在指数中对 z 配方）

$$p(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y,z)dz=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{27}}}e^{-\frac{1}{2}(5x^2+3\frac{1}{2}y^2+4xy)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(z+x+\frac{1}{2}y)^2}dz$$

令 $z+x+\frac{1}{2}y=t$，利用 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ 得

$$p(x,y)=\frac{3\sqrt{6}}{4\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(5x^2+4xy+3\frac{1}{2}y^2)\right\}。$$

40、证：以 f 记 ξ 的密度函数，则 (ξ,η) 的联合密度为 $f(x0f(y)$。作变换，令 $s=x+y$，$t=x-y$ 得 $x=\frac{1}{2}(s+t),\ y=\frac{1}{2}(s-t),\ |J|=\frac{1}{2}$。若改记 s 为 x，t 为 y，则由此可得 $(\xi+\eta,\xi-\eta)$ 的联合密度为 $\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)f\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$。另一方面，由卷积公式得 $\xi+\eta$ 和 $\xi-\eta$ 的密度分别为

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)f(s)ds,\quad h(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y+t)f(t)dt.$$

故由 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 独立得

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)f\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)=g(x)h(y)。$$

令 $m(x)=\log f(x)$（此处用了 $f(x)>0$），则有

$$m\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+m\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)=\log g(x)+\log 2h(y)。$$

由假定知 $m(x)$ 有二阶导数，上式对 x 求导得

$$m'\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)_x'+m\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)_x'=(\log g(x))_x'$$

再对 y 求一次导数得

$$\frac{1}{4}m''\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)-\frac{1}{4}m''\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)=0.$$

对任意 u, v，选择 x, y 使 $u=\frac{1}{2}(x+y),\ v=\frac{1}{2}(x-y)$ 则由上式得 $m''(u)-m''(v)=0$.

由 u, v 的任意性得 $m'''\equiv$ 常数，因而 $m(x)=a+bx+cx^2$，即有 $f(x)=\exp(a+bx+cx^2)$.

所以 ξ,η，从而 $\xi+\eta$, $\xi-\eta$ 均匀正态分布。

41、证：（1）若 $\omega\in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$，则 $f(\omega)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，必存在某个 $\lambda_0\in\Lambda$ 使 $f(\omega)\in B_{\lambda 0}$，亦有

$\omega \in f^{-1}(B_{\lambda 0})$，从而 $\omega \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$，

$$\therefore \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) \supset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \tag{1}$$

反之，若 $\omega \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$，必存在某个 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使 $\omega \in f^{-1}(B_{\lambda 0})$ 亦有 $f(\omega) \in B_{\lambda 0}$，即 $f(\omega) \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$，从而 $\omega \in f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$，

$$\therefore f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \supset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)。 \tag{2}$$

由（1),（2）式即得（和集的逆像等于每个集逆像的和）

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)。$$

（2）若 $\omega \in f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$，则 $f(\omega) \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$，即 $f(\omega)$ 属于每个 $B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，得 $\omega \in f^{-1}(B_\lambda)$（对任一 $\lambda\in\Lambda$），从而 $\omega \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$，

$$\therefore \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) \supset f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)。 \tag{3}$$

反之，若 $\omega \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$，则 ω 属于每个 $f^{-1}(B_\lambda) \in (\lambda\in\Lambda)$，亦有 $f(\omega)$ 属于每个 $B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，即 $f(\omega) \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$，从而 $\omega \in f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$，

$$\therefore f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)。 \tag{4}$$

由（3),（4）式即得（交集的逆像等于每个集逆像的交）

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)。$$

（3）若 $\omega \in f^{-1}(\overline{B})$，则 $f(\omega) \overline{\in} B$，亦有 $\omega \overline{\in} f^{-1}(B)$，从而 $\omega \in \overline{f^{-1}(B)}$，所以 $\overline{f^{-1}(B)} \supset f^{-1}(\overline{B})$。反之，若 $\omega \in \overline{f^{-1}(B)}$，则 $\omega \overline{\in} f^{-1}(B)$，亦有 $f(\omega) \overline{\in} B$，即 $f(\omega) \overline{\in} B$，从而 $\omega \in f^{-1}(\overline{B})$，所以 $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$。

由以上证明可得 $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$，即互为对立事件的逆像也是互为对立的事件。

42、解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 得 $\int_0^1 cx^2 dx = 1 \therefore c = 3$

(2) 由 $P(\xi > a) = P(\xi < a)$ 得：$\int_0^a 3x^2 dx = \int_a^1 3x^2 dx$

故$a^3 = 1 - a^3 \ \therefore a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

43、解：设ξ是所抽卡片的号数，记 $A = \frac{n(n+1)}{2}$,则ξ的分布列是:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \frac{1}{A} & \frac{2}{A} & \cdots & \frac{n}{A} \end{pmatrix} \text{由 } E\xi = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(\xi = k) = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n+1}{3}$$

44、解: 当$(\xi,\eta) \sim N(a_1,a_2,\sigma_1,\sigma_2,r)$时$\xi \sim N(a_1,\sigma_1{}^2)$ 且在$\xi = x$条件下η的分布是

$N\left(a_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1),\sigma_2{}^2(1-r^2)\right)$ 由此比较题中条件可知:

$a_1 = m,\sigma_1{}^2 = \tau^2, a_2 = m, \sigma_2{}^2 = \tau^2 + \sigma^2, r^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}$

故在 y=η 条件下，η的条件分布 $N(a_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2),\sigma_1{}^2(1-r^2))$ 它的密度函数为

$$P(x\,|\,y) = \frac{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}{2\pi\tau\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\sigma^2(x-m)+\tau^2(x-y)]^2}{\tau^2\sigma^2(\tau^2+\sigma^2)}\right\}$$

45、解：由题设((ξ,η) 的分布密度函数是：$P(X,Y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & (x.y) \in [0.a]\times[0.a] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

由商的密度计算公式 $X = \frac{\xi}{\eta}$ 的密度$\rho(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(yz,y)|y|dy$ 得：

$$p(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2z^2} & z \ge 1 \end{cases}$$

46、解：1)由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x.y)dxxdy = 1$ 得 $A = 4$

2) $\because \eta$ 的边际密度是 $\rho_\eta(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$

$\therefore$ 当 $y>0$ 时，$\eta=y$ 的条件下 ξ 的条件密度为 $f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

47、解：设所取二数为 X,Y，则它们是独立的均服从（0,4）上的均匀分布

$$\therefore\ (X,Y)\text{ 的密度函数为 } p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{16},(0<x<4,0<y<4)\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore p(xy<4)=\iint\limits_{0<xy<4}p(x,y)dxdy=\frac{1+\ln 4}{4}$$

48、解：1)由 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}p_{ij}=1$ 得：$A=\frac{1}{8}$

2)在 ξ=2 时，η 的条件分布列为 $P(\eta=k(\xi=2)=\frac{P(\eta=k,\xi=2)}{P(\xi=2)}$ 得 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{2}{11} & \frac{6}{11} & \frac{3}{11}\end{pmatrix}$

49、解：$\because(\xi,\eta)$ 的联合密度为：$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}$

令 $\begin{cases}s=x+y\\ t=x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=\frac{1}{2}(s+t)\\ y=\frac{1}{2}(s-t)\end{matrix}\quad\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|=\frac{1}{2}$

$\therefore(u,v)$ 的联合密度为:

$$\rho_{uv}(s,t)=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(s+t)^2}{4}+\frac{(s-t)^2}{4}]\}\cdot\frac{1}{2}\quad=\frac{1}{4\pi}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{s^2}{2}+\frac{t^2}{2}]\}$$

$\therefore u$:的边际密度是：$\rho_u(s)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{s^2}{4}}$　　同理 V 的边际密度为: $\rho_v(t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}$

50、解：ξ 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}P(y)dy=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^4 & 0<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

(1) 由 $1-F(a)=F(a)$，得 $a^4=0.5$　则 $a=\sqrt[4]{0.5}$

(2) 由 $1-F(b)=0.05$，得 $1-b^4=0.05$　则 $b=\sqrt[4]{0.95}$

51、解：设 ξ 为旅客的候车时间，则 ξ 在 $[0,2]$ 上均匀分布

则 $E\xi=\int_0^2 \frac{x}{2}dx=1$　　$D(\xi)=\int_0^2 \frac{(x-1)^2}{2}dx=\frac{1}{3}$　　$\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=0.577$

52、解：1) $p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy=\int_0^1 6xy(2-x-y)dy=4x-3x^2, 0\le x\le 1$　则

$$P_\zeta(z)=P_{2\xi+3}(z)=\frac{1}{2}P_\xi\left(\frac{z-3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{z-3}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{z-3}{2}\right)^2=-\frac{3}{8}z^2+\frac{26}{8}z-\frac{51}{8},(3\le z\le 5)$$

2) $P_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{6y(2-x-y)}{4-3x},(0\le x\le 1, 0\le y\le 1)$

3) $$P\{\eta<\frac{1}{2}|\xi<\frac{1}{2}\}=\frac{P\{\eta<\frac{1}{2},\xi<\frac{1}{2}\}}{P(\xi<\frac{1}{2})}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}6xy(2-x-y)dxdy}{\int_0^{\frac{1}{2}}(4x-3x^2)dx}=\frac{1}{3}$$

53、解：1) $P_{\xi+\eta}^{(Z)}=\int_{-\infty}^{\infty}P(x,z-x)dx=2\int_0^z e^{-(2x+z-x)}dx=2e^{-z}(1-e^{-z})$　$Z>0$

2) $P\{\xi+\eta<2\}=\int_0^2 P_{\xi+\eta}(z)dz=(1-e^{-2})^2$

3) $P\{\xi<1|\eta<2\}=\frac{P(\xi<1,\eta<2)}{P(\eta<2)}=\int_0^1\int_0^2 2e^{-(2x+y)}dxdy\Big/\int_0^2\left(\int_0^{\infty}2e^{-(2x+y)}dx\right)dy=1-e^{-2}$

54、解：$p(\eta<y)=p\left(\frac{\xi-a}{\sigma}<y\right)=p(\xi<a+\sigma y)=\int_0^{a+\sigma\eta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$

$=\int_0^{\eta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$　　$\therefore \eta$ 服从 $-N(0,1)$

55、解：

	0	1	2
0	4/16	4/16	1/16
1	4/16	2/16	0
2	1/16	0	0

ξ_1	0	1	2
$p(./\xi_2=1)$	2/3	1/3	0

56、解：当 $y\le 0$ 时，$F_\eta(y)=0$，当 $y>0$ 时，

$$F_\eta(y)=P(\xi^2<y)=P(-\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\varphi(x)dx$$

$$\therefore P_\eta(y)=F'_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$$

57、解：$P_{ij}=P(\xi_i=i,\xi_2=j)=p^2q^{j-2}(q=1-p,i<j,j=2,3,\cdots)$

$$p_i^{(1)}=p(\xi_1=i)=pq^{i-1}(i=1,2,\cdots)$$

$$p_j^{(2)}=p(\xi_2=j)=(j-1)p^2q^{j-2}(j=2,3,\cdots)$$

$$p(\frac{\xi_1=i}{\xi_2=j})=\frac{1}{j-1}(i=1,2,\cdots)$$

$$p(\frac{\xi_2=j}{\xi_1=i})=pq^{j-i-1}(j=i+1\cdots)$$

58、解：X的所有可能值为$r,r+1,r+2,\cdots$。事件$\{X=i\}$表示第i次试验取得第r次成功。前面$(i-1)$次试验中，有$(r-1)$次成功，有$(i-1)-(r-1)=i-r$次失败。这相当于在$(i-1)$个位置中，取$(r-1)$个位置，情况总数为C_{i-1}^{r-1}。有$\{X=i\}=\{$前$(i-1)$次试验有$(r-1)$次成功，第i次为成功$\}$，故

$$P\{X=i\}=C_{i-1}^{r-1}p^{r-1}q^{i-1}p=C_{i-1}^{r-1}p^rq^{i-r}=r,r+1,r+2,\cdots$$

注：X服从的分布称为帕斯卡分布。当$r=1$时

$$P\{X=i\}=q^{i-1}p \qquad i=1,2,\cdots$$

称为几何分布。

59、**解**：首先求一只电子管工作1000小时以上的概率。$p=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{1000}e^{-Fx}1000dx=e^{-1}\approx 0.3679$

只有当5只电子管皆工作在1000小时以上，仪器才能工作1000小时以上。又“每只电子管工作1000小时以上”是相互独立的，所以所求概率为 $p^5\approx 0.00673$， 此概率很小。

60、解：（1）利用概率密度的性质$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，即可确定A。

$$\int_0^{\infty}Ax^2e^{-kx}dx=A\left[-\frac{x^2}{k}e^{-kx}\right]\Bigg|_0^{\infty}+\frac{2A}{k}\int_0^{\infty}xe^{-kx}dx=\frac{2A}{k^3}=1$$

故$A=\frac{1}{2}k^3$

（2）$P\left\{0\le X\le\frac{1}{k}\right\}=\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{k^2}{2}x^2e^{-kx}dx=-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}\Bigg|_0^{\frac{1}{k}}=1-\frac{5}{2e}$

61、解：（1）当 $x<0$ 时， $F(x)=P\{X\le x\}=0$

当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{3}$

当 $1 \le x < 2$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

当 $x \ge 2$ 时，$F(x) = P\{X \le 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 1$

$$故\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

（2）$P\left\{X \le \frac{3}{2}\right\} = F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$P\{1 < X \le 4\} = F(4) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P\{1 \le X \le 4\} = P(1 < X \le 4) + P\{X = 1\} = F(4) - F(1) + P\{X + 1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

或这样做：因区间[1，4]包含二个可能值 1,2，它对应的概率分别为$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$。故

$$P\{1 \le X \le 4\} = P\{X = 1\} + P\{X + 2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

62、解： X 的可能值 0,1,2。因是不放回抽样，故

$$P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 C_{13}^3}{C_{15}} = \frac{22}{35};\quad P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 C_{13}^2}{C_{15}^3} = \frac{12}{35};\quad P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 C_{13}^1}{C_{15}^3} = \frac{1}{35}$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
p	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{22}{35}, & 0\le x<1\\ \dfrac{34}{35}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

63、解：（1） $Y=X^3$，为单调增函数，反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$，故

$$f_Y(y)=f_x(y^{\frac{1}{3}})\left(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{3}f\left(\sqrt[3]{y}\right)y^{-\frac{2}{3}}\qquad (y\ne 0)$$

（2） $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \mathrm{x}\le 0\end{cases}$，利用（1）的结果，有 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\lambda e^{-\lambda\sqrt[3]{y}}y^{-\frac{2}{3}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

64、解： $Y=\dfrac{\pi}{4}X^2$ $\qquad f_X(x)=\begin{cases}1, & 5\le x\le 6\\ 0, & 其它\end{cases}$

当 $\dfrac{25}{4}\pi\le y\le 9\pi$ 时， $y=\dfrac{\pi}{4}x^2$ 单调增。 $x=\sqrt{\dfrac{4y}{\pi}}=2\sqrt{\dfrac{y}{\pi}}=h(y)$， $h'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}$。故当 $\dfrac{25}{4}\pi\le y\le 9\pi$ 时， $f_Y(y)=1\times\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}$。而当 y 取其它值时， $f_Y(y)=0$，故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \dfrac{25}{4}\pi\le Y\le 9\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$$

65、解： Θ 的概率密度

$f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$。函数 $V=A\sin\theta$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调增，故其反函数

$\theta=h(v)=\arcsin\dfrac{v}{A}$ 单值。

当 $|v|\ge A$ 时，V 的概率密度 $f_V(v)=0$

当 $|v|<A$ （即 $-A<v<4$ ）时 $h'(v)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{A}\right)^2}}\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{\sqrt{A-v^2}}$

$$f_V(v)=\frac{1}{\pi}|h'(v)|=\frac{1}{\pi\sqrt{A-v^2}}$$

故 $f_V(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{A-v^2}}, & -A<v<A \\ 0, & 其它\end{cases}$

66、解：（1）$p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\dfrac{10}{12}\times\dfrac{10}{12}=\dfrac{25}{36}$，

$$p_{21}=P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{2}{12}\times\frac{10}{12}=\frac{5}{36},$$

$$p_{12}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{10}{12}\times\frac{2}{12}=\frac{5}{36},$$

$$p_{22}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}=\frac{1}{36}$$

故 (X,Y) 的联合分布列及关于 X,Y 的边缘分布列为：

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

（2）$p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\dfrac{10}{12}\times\dfrac{9}{11}=\dfrac{5}{22}$，

$$p_{21}=P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{33},$$

$$p_{12}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{5}{33},$$

$$p_{22}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$$

故联合分布列及边缘分布列如下：

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{15}{22}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

67、解：$P\{X=0, Y=0\}=P(\phi)=0$，　$P\{X=0, Y=1\}=\dfrac{C_3^0C_2^1C_3^3}{C_8^4}=\dfrac{2}{70}$，

$P\{X=0, Y=2\}=\dfrac{C_3^0C_2^2C_3^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{70}$，$P\{X=1, Y=0\}=\dfrac{C_3^1C_2^0C_3^3}{C_8^4}=\dfrac{3}{70}$，

$P\{X=1, Y=1\}=\dfrac{C_3^1C_2^1C_3^2}{C_8^4}=\dfrac{18}{70}$，$P\{X=1, Y=2\}=\dfrac{C_3^1C_2^2C_3^1}{C_8^4}=\dfrac{9}{70}$

同样，可计算其它情况。(X, Y) 的联合分布列为：

X \ Y	0	1	2
0	0	$\frac{2}{70}$	$\frac{3}{70}$
1	$\frac{3}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{9}{70}$
2	$\frac{9}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{3}{70}$
3	$\frac{3}{70}$	$\frac{2}{70}$	0

68、解：当连掷 3 次出现反面时，(X, Y) 的取值为 $(0,3)$；出现 1 次正面，2 次反面时，(X, Y) 的取值为 $(1,1)$；出现 2 次正面，1 次反面时，(X, Y) 的取值为 $(2,1)$；出现 3 次正面时，(X, Y) 的取值为 $(3,3)$。有

$P\{X=0, Y=3\}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，　$P\{X=1, Y=1\}=C_3^1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，

$P\{X=2, Y=1\}=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}$，　$P\{X=3, Y=3\}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，

又 $P\{X=0, Y=1\}=P(\phi)=0$，　$P\{X=1, Y=3\}=P(\phi)=0$，

$P\{X=2, Y=3\}=P(\phi)=0$，　$P\{X=3, Y=1\}=P(\phi)=0$

故 (X, Y) 的联合分布列为：

X \ Y	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

69、解：（1）$1=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\2\le y\le 4}} k(6-x-y)dxdy=k\int_0^2 dx\int_2^4(6-x-y)dy=k\int_0^2(6-2x)dx=8k$

故 $k=\frac{1}{8}$，即 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y), & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$。

（2）$P\{X\le 1, Y\le 3\}=\int_{-\infty}^1\int_{-\infty}^3 f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(6-x-\frac{5}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}$$

（3）$P\{X\le 1.5\}=\iint\limits_{x\le 1.5} f(x,y)dxdy=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}$

（4）$P\{X+Y\le 4\}=\iint\limits_{G:x+y\le 4} f(x,y)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2 dx\int_2^{4-x}(6-x-y)dy=\frac{1}{8}\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\right)dx=\frac{2}{3}$

70、解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}A(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R A(R-\rho)\rho d\rho=2\pi\int_0^R A(R-\rho^2)d\rho=\frac{\pi AR^3}{3}$$

故 $A=\frac{3}{\pi R^3}$。

（2）$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\frac{3}{\pi R^3}(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\frac{3}{\pi R^3}(R-\rho)\rho d\rho$

$$=\frac{6}{R^3}\left(\frac{R\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^r=\frac{r^2(3R-2r)}{R^3}$$

71、解：（1）(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y\frac{6}{\pi^2(4+u^2)(9+v^2)}dudv$$

$$=\left(\int_{-\infty}^x\frac{2}{\pi(4+u^2)}du\right)\left(\int_{-\infty}^y\frac{3}{\pi(9+v^2)}dv\right)=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

（2）$F_X(x)=F(x,+\infty)=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{x}{2}\right)$，$F_Y(y)=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{y}{3}\right)$。

72、解： 当 $x>0$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$；

当 $x\le 0$ 时，$f(x,y)=0$，故 $f_X(x)=0$。得 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^x e^{-y}dy, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

73、解： X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & -a\le x\le a\\ 0, & 其它\end{cases}$； Y 的概率密度 $F_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}b}e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma^2}}$；

则 Z 的概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-a}^{a}\dfrac{1}{2a}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-x-b)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}a}\int_{\frac{z-a-b}{\sigma}}^{\frac{z+a-b}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2a}\left[\Phi\left(\frac{z+a-b}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-a-b}{\sigma}\right)\right]$$

74、证： $\because \xi,\eta,\zeta$ 的地位对称

$\therefore$ 只证 ξ 与 η 独立即可知 ξ,η,ζ 两两独立。

$\therefore(\xi,\eta)$ 的联合密度是：$p(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y,z)dy=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi^2} & 0\le x,y\le 0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\therefore P_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & 0\le x\le 2\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$ （得 4 分）

同理 $P_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & 0\le y\le 2\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$ $P_\zeta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & 0\le y\le 2\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$

故 $P_{\xi\eta}(x,y)=P_\xi(x)\cdot P_\eta(y)\therefore\xi$ 与 η 独立

但 $P_\xi(x)P_\eta(y)P_\zeta(z)\ne P_\xi(x)\cdot P_\eta(y)\cdot P_\zeta(z)$

故 ξ,η,ζ 不相互独立。

75、证：令$\begin{cases} u=\xi+\eta \\ v=\dfrac{\xi}{\eta} \end{cases}$ 即$\begin{cases} z_1=x+y \\ z_2=\dfrac{x}{y} \end{cases}$ 逆变换$\begin{cases} x=\dfrac{z_1z_2}{1+z_2} \\ y=\dfrac{z_1}{1+z_2} \end{cases}$ $J=\dfrac{z_1}{(1+z_2)^2}$

故$P_{\xi+\eta,\frac{\xi}{\eta}}(z_1,z_2)=P(\dfrac{z_1z_2}{1+z_2},\dfrac{z_1}{1+z_2})|J|=e^{-z_1}\dfrac{z_1}{(1+z_2)^2},z_1\ge 0,z_2\ge 0$

而$P_{\xi+\eta}(z_1)=\int_0^{\infty}e^{-z_1}\dfrac{z_1}{(1+z_2)^2}dz_2=z_1e^{-z_1},z_1\ge 0$

$P_{\frac{\xi}{\eta}}(z_2)=\int_0^{\infty}e^{-z_1}\dfrac{z_1}{(1+z_2)^2}dz_1=\dfrac{1}{(1+z_2)^2},z_2\ge 0$

因$P_{\xi+\eta,\frac{\xi}{\eta}}(z_1,z_2)=P_{\xi+\eta}(z_1)P_{\frac{\xi}{\eta}}(z_2)$对$\forall z_1,z_2$

故 $\xi+\eta$ 与$\dfrac{\xi}{\eta}$独立。

76、证：显然 $p(x)\ge 0$ 而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$\overset{y=\frac{x}{2}}{=}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty}2^{\frac{n}{2}-1}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y}\cdot 2dy$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\gamma}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y}dy=1\cdots\cdots 8\text{分}$$

77、证：$P(\xi=k)=\dfrac{\lambda_1{}^k}{k!}e^{-\lambda_1}\ p(\eta=r)=\dfrac{\lambda_2{}^\gamma}{\gamma!}e^{-\lambda_2}$

$$\therefore P(\tau=n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1{}^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2{}^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{n!}e^{-(\lambda+\lambda_{21})}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1{}^k\lambda_2{}^{(n-k)}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

78、证：$f(x)\ge 0$，且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}dx=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}$

$\therefore f(x)$ 是一个密度函数。

79、证：（1）设 $x_2 > x_1$, $F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<\xi\le x_2\}\ge 0$，所以 $F(x_2)\ge F(x_1)$， $F(x)$ 非降。

（2）设 $x<\cdots<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<x_0$， $x_1\downarrow x$ 由概率的可加性得

$$P\left\{\prod_{i=0}^{\infty}(x_{i+1}<\xi\le x_i)\right\}=P\{x<\xi\le x_0\}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[F(x_i)-F(x_{i+1})\right]=F(x_0)-F(x)。$$

由此得 $F(x_0)-F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[F(x_0)-F(x)\right]$,

$\therefore$ $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n)=F(x+0)$, $F(x)$ 右连续。

（3） $1=P\{-\infty<\xi<\infty\}=\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}P\{n<\xi\le n+1\}$

$$=\sum_{n\to\infty}^{\infty}\left[F(n+1)-F(n)\right]=\lim_{n\to\infty}F(n)=\lim_{m\to-\infty}F(m)。$$

由单调性得 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ 均存在且有穷，由 $0\le F(x)\le 1$ 及上式得 $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$。

80、证： $P\{x_1\le\xi\le x_2\}=P\{\xi\le x_2\}-P\{\xi<x_1\}=P\{\xi\le x_2\}-(1-P\{\xi\le x_2\})$

$$=P\{\xi\le x_2\}+P\{\xi\ge x_1\}-1\ge(1-\beta)+(1-\alpha)-1=1-(\alpha+\beta).$$

$\therefore$不等式成立

81、证法一：定义 $F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0]\\ P\{0\le\xi<x\}, & x\in(0,1]\\ 1, & x\in(1,\infty)\end{cases}$ 则 $F(x)$ 是 ξ 的分布函数。由题设得，对任意 $2x\in[0,1]$ 有 $P\{0\le\xi<x\}=P\{x\le\xi<2x\}$，即有 $P\{0\le\xi<2x\}=2P\{0\le\xi<x\}$。由此得 $F(2x)=2F(x)$。逐一类推可得，若 $nx\in[0,1]$，则 $F(nx)=nF(x)$，或者 $\frac{1}{n}F(x)=F(\frac{x}{n})$。从而对有理数 $\frac{m}{n}$，若 $\frac{m}{n}x$ 与 x 都属于[0,1]，则有 $F\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}F(x)$。再由 $F(x)$ 的左连续性可得，对任意无理数 a，若 ax 与 x 都属于[0,1]，则 $F(ax)=aF(x)$。

因为区间 $[0,1)$ 与[0,1]的长度相等，由题设得

$$F(1)=P\{0\le\xi<1\}=P\{0\le\xi\le 1\}=1.$$

由此及上段证明得，对任意 $x\in[0,1]$ 有 $F(x)=xF(1)=x$，即 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

∴ ξ 服从[0,1]上均匀分布。

证法二：如同证法一中定义 ξ 的分布函数 $F(x)$，由 $F(x)$ 单调知它对[0,1]上的 L－测试几乎处处可微。设 $x_1,x_2\in(0,1)$，当 $x_1+\Delta x\in[0,1](i=1,2)$ 时，由题设得

$$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=P\{x_1\le\xi<x_1+\Delta x\}$$

$$=P\{x_2\le\xi<x_2+\Delta x\}=F(x_2+\Delta x\}-F(x2)$$

等式两端都除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$ 可得，由 $F'(x_1)$ 存在可推得 $F'(x_2)$ 也存在，而且 $F'(x_2)=F'(x_1)$。从而对任意 $x\in(0,1)$ 有 $F'(x)\equiv c$。当 $x\overline{\in}[0,1]$ 时显然有 $F'(x)=0$。一点的长度为 0，由题设得 $P\{\xi=0\}=P\{\xi=1\}=0$。由上所述可知 ξ 是连续型随机变量，$F'(x)$ 是其密度函数，从而定出 $c=1$。至此得证 ξ 服从[0,1]均匀分布。

82、**证**：分别对固定的 x_0 和 y_0 有 $F(x_0,y)=\begin{cases}1, & y>-x_0\\ 0, & y\le -x_0\end{cases}$，$F(x,y_0)=\begin{cases}1, & x>-x_0\\ 0, & x\le -y_0\end{cases}$ 。

由上式显然可得 $F(x,y)$ 对每个变元非降，左连续，而且满足(2.6)及(2.7)，即 $F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$ 但有

$$F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=-1,$$

这说明当取 $a_1=a_2=0, b_1=b_2=1$ 时(2.5)式不成立。所以 $F(x,y)$ 不是分布函数。

83、**证**：必要性：

$$\iint f(x,y)dxdy=\iint ke^{-a(x+\frac{b}{a}y)^2}\cdot e^{-\frac{ac-b^2}{a}y}dxdy$$

令 $u=x+\dfrac{b}{a}y,\ v=y$，得 $y=v,\ x=u-\dfrac{b}{a}v,\ J=1$。设

$$\iint f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} ke^{-au^2}du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac-b^2}{a}v^2}dv$$

要积分收敛，必须 $a>0,\ (ac-b^2)/a>0$，由此得应有 $ac-b^2>0$ 以及 $c>0$。利用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$ 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-au^2}du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac-b^2}{a}v^2}dv = k\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ac-b^2}}\sqrt{\pi}=1$$

$\therefore\quad k=\dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}$

从而题中所列条件全部满足。 以上诸步可逆推，充分性显然。

84、证：我们有 $\quad 0\le F_i(x_i)\le 1,\quad 1\le 2f_i(x_i)-1\le 2-1=1,$

$$-1\le[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1][2F_3(x_3)-1]\le 1,$$

代入 $f_\alpha(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式得 $\qquad f_\alpha(x_1,x_2,x_3)\ge 0 \qquad$ （1）

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}[2F_i(x_i)-1]f_i(x_i)dx_i=\int_{-\infty}^{\infty}[2F_i(x_i)-1]dF_i(x_i)=\left[F_i^2(x_i)-F_i(x_i)\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$\therefore \iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{\infty}f_3(x_3)dx_3=1 \qquad (2)$$

由（1），（2）知 $f_\alpha(x_1,x_2,x_3)$ 是密度函数。用与上面类似的方法计算可得边际密度函数为

$\therefore \iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3=f_1(x_1),\qquad \iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2=f_3(x_3)$

$\iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3=f_2(x_2)$.

85、证：当 $0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2\pi$ 时，ξ 与 η 的联合分布密度为

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3(1-\sin x\sin y\sin z)dz}=\left[\frac{z}{8\pi^3}-\sin x\sin y(-\cos z)\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi^2};$$

其余 $p_{\xi\eta}(x,y)=0$。当 $0\le x\le 2\pi$ 时，

$$p_{\xi\eta}(x)=\int_0^{2\pi}dy\int_0^2\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)dz=\frac{1}{2\pi};$$

其余 $p_\xi(x)=0$。由于 ξ,η,ζ 三者在密度函数的表达式中所处地位相同，故得当

$0\le x\le 2\pi$，$0\le z\le 2\pi$ 时，$p_{\xi\zeta}(x,z)=1/4\pi^2$；当 $0\le y\le 2\pi$，$0\le z\le 2\pi$ 时，

$p_{\eta\zeta}(y,z)=1/4\pi^2$；当$0\le y\le 2\pi$ 时，$p_\eta(z)=1/2\pi$；当 $0\le z\le 2\pi$ 时，$p_\zeta(z)=1/2\pi$；在其余区域内，诸边际密度函数均取 0 值。由于 $p_{\xi\eta}(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$， $p_{\xi\zeta}(x,z)=p_\xi(x)p_\zeta(z)$，$p_{\eta\zeta}(y,z)=p_\eta(y)p_\zeta(z)$， 故$\xi,\eta,\zeta$ 两两独立；但当$0<x<2\pi$，$0<y<2\pi$, $0<z<2\pi$ 时有 $p(x,y,z)\ne p_\xi(x)p_\eta(y)p_\zeta(z)$，故$\xi,\eta,\zeta$ 不相互独立。

86、证：（1）由褶积公式及独立性得

$$P\{\xi_1+\xi_2=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i,\xi_2=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i\}P\{\xi_2=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-1)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-1}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

这就证明了$\xi_1+\xi_2$具有普阿松分布，且参数为$\lambda_1+\lambda_2$

（2）$$P\{\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=n\}=\frac{P\{\xi_1=k,\xi_1+\xi_2=n\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}$$

$$=\frac{P\{\xi_1=k,\xi_2=n-k\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}=\frac{P\{\xi_1=k\}P\{\xi_2=n-k\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}$$

$$=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\div\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$ 证毕。

87、证：由题设得

$$P\{\xi=1\}=P(\{\xi=1,\eta=1\}\cup(\xi=-1,\eta=-1\})=\frac12\cdot\frac12+\frac12\cdot\frac12=\frac12,$$

$$P\{\xi=-1\}=P(\{\xi=1,\eta=-1\}\cup(\xi=-1,\eta=1\})=\frac12\cdot\frac12+\frac12\cdot\frac12=\frac12。$$

$$P\{\xi=1,\zeta=1\}=P(\{\xi=1\}\cap[\{\xi=1,\eta=1\}\cup(\xi=-1,\eta=-1\}])$$

$$=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac14=P\{\xi=1\}P\{\zeta=1\},$$

$$P\{\xi=1,\zeta=-1\}=P(\{\xi=1\}\cap[\{\xi=1,\eta=-1\}\cup(\xi=-1,\eta=1\}])$$

$$=P\{\xi=1,\eta=-1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=-1\}=\frac{1}{4}=P\{\xi=1\}P\{\zeta=-1\},$$

同理可证 $P\{\xi=-1,\zeta=1\}+P\{\xi=-1\}P\{\zeta=1\}$，$P\{\xi=-1,\zeta=-1\}+P\{\xi=-1\}P\{\zeta=-1\}$.

所以ξ与ζ相互独立。用同样的方法可片η与ζ也相互独立。但

$$P\{\xi=1,\eta=1,\zeta=1\}=P(\{\xi=1,\eta=1\}\cap[\{\xi=1,\eta=1\}\cup\{\xi=-1,\eta=-1\}]),$$

$$P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}P\{\zeta=1\}=\frac{1}{8},$$

所以ξ,η,ζ只两两独立而不相互独立。

88、证：由独立性得，$V=(x,y,z)$的概率密度为 $p(x,y,z)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}$

$S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的分布函数为，当$s>0$时，

$$F(s)=P\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<s\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2<s^2}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y+z^2)}dxdydz$$

作球面坐标变换，$x=\rho\cos\theta\sin\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=\rho\cos\varphi$，则$|J|=\rho^2\sin\varphi$，

$$F(s)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2}\rho^2/\sigma^2}\times\rho^2d\rho$$

$$=2\pi\cdot2\int_0^{a}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2}\rho^2/\sigma^2}\cdot\rho^2d\rho$$

由此式对 s 求导可得，当$s>0$时，S 的密度函数为

$$F'(s)=f(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right).$$

89、证：当$x>o$时，ξ与η的密度函数分别为

$$p_\xi(x)=\frac{\lambda^{r_1}}{\Gamma(r_1)}x^{r_1-1}e^{-\lambda x},\quad p_\eta(x)=\frac{\lambda^{r_2}}{\Gamma(r_2)}x^{r_2-1}e^{-\lambda x};$$

当$x\le0$时，$p_\xi(x)=p_\eta(x)=0$。设$U=\xi+\eta$，$V=\frac{\xi}{\eta}$。当$s\le0$或$t\le0$时，（U，V）联合密度

为$p(s,t)=0$；当$s>0,t>0$时，作变换$s=x+y$，$t=\frac{x}{y}$，得$x=\frac{st}{(1+t)}$，$y=\frac{s}{(1+t)}$而

$|J|=\dfrac{s}{(1+t)^2}$，所以

$$p(s,t)=\frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}x^{r_1-1}y^{r_2-1}e^{-\lambda(x+y)}\,|J|\ =\frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left(\frac{st}{1+t}\right)^{r_1-1}\left(\frac{s}{1+t}\right)^{r_2-1}e^{-\lambda s}\frac{s}{(1+t)^2}$$

$$=\left[\frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}s^{r_1+r_2-1}e^{-\lambda s}\right]\times\left[\frac{\Gamma(r_1+r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\cdot\frac{t^{r_1-1}}{(1+t)^{r_1+r_2}}\right]=p_U(s)p_V(t)$$

由此知 U 服从分布服从分布，且 U 与 V 相互独立。

90、证：必要性。设ξ是随机变量，则对$C\in B$有$\{\omega:\xi(\omega)\in C\}\in F$，又$(-\infty,x)\in B_1$，

$$\therefore\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\{\omega:\xi(\omega)\in(-\infty,x)\in F.$$

充分性。记$M=\{A:A\subset R^1,(\omega:\xi(\omega)\in A)\in F\}$，现证 M 是$R^1$中$\sigma-$域。

（1）$\{\omega:\xi(\omega)\in R^1\}=\Omega\in F$，故$R^1\in M$。

（2）若$C\in M$，由上题$f^{-1}(\overline{C})=\overline{f^{-1}(C)}$得$(\omega:\xi(\omega)\in\overline{C})=\Omega-(\omega:\xi(\omega)\in C\}\in F$，故$\overline{C}\in M$对余集运算封闭。

（3）设$C_i\in M,\cdots$，由上题（1）中结论得$\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i\in M$，$M$关于可列并集运算封闭。

由(1)—(3)知，M 是$\sigma-$域的集类。由条件知，$M\supset\{(-\infty,x):x\in R^1\}$，

$$\therefore M\supset S\{(-\infty,x):x\in R^1\}=B_1,$$

其中 S{A}表示由集类 A 产生的$\sigma-$域。由此得证ξ是一随机变量。

第四章　数字特征与特征函数

1、设 μ 是事件 A 在 n 次独立试验中的出现次数，在每次试验中 $P(A)=p$，再设随机变量 η 视 μ 取偶数或奇数而取数值 0 及 1，试求 $E\eta$ 及 $D\eta$。

2、袋中有 k 号的球 k 只，$k=1,2,\cdots,n$，从中摸出一球，求所得号码的数学期望。

3、随机变量 μ 取非负整数值 $n\geq 0$ 的概率为 $p_n = AB^n/n!$，已知 $E\mu = a$，试决定 A 与 B。

4、袋中有 n 张卡片，记号码 1, 2, …, n, 从中有放回地抽出 k 张卡片来，求所得号码之和 μ 的数学期望及方差。

5、试证：若取非负整数值的随机变量 ξ 的数学期望存在，则 $E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \geq k\}$。

6、若随机变量 ξ 服从拉普拉斯分布，其密度函数为 $p(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{-|x-\mu|}{\lambda}}$，$-\infty < x < \infty,\quad \lambda > 0$。试求 $E\xi$，$D\xi$。

7、若 ξ_1,ξ_2 相互独立，均服从 $N(a,\sigma^2)$，试证 $E\max(\xi_1,\xi_2) = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$。

8、甲袋中有 a 只白球 b 只黑球，乙袋中装有 α 只白球 β 只黑球，现从甲袋中摸出 $c(c\leq a+b)$ 只球放入乙袋中，求从乙袋中再摸一球而为白球的概率。

9、现有 n 个袋子，各装有 a 只白球 b 只黑球，先从第一个袋子中摸出一球，记下颜色后就把它放入第二个袋子中，再从第二个袋子中摸出一球，记下颜色后就把它放入第三个袋子中，照这样办法依次摸下去，最后从第 n 个袋子中摸出一球并记下颜色，若在这 n 次摸球中所摸得的白球总数为 S_n，求 S_n。

10、在物理实验中，为测量某物体的重量，通常要重复测量多次，最后再把测量记录的平均值作为该体质重量，试说明这样做的道理。

11、若 ξ 的密度函数是偶函数，且 $E\xi^2 < \infty$，试证 $|\xi|$ 与 ξ 不相关，但它们不相互独立。

12、若 ξ,η 的密度函数为 $p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$，试证：$\xi$ 与 η 不相关，但它们不独立。

13、若 ξ 与 η 都是只能取两个值的随机变量，试证如果它们不相关，则独立。

14、若 $U = aX+b, V = cY+d$，试证 U,V 的相关系数等于 X,Y 的相关系数。

15、若ξ_1,ξ_2,ξ_3是三个随机变量，试讨论（1）ξ_1,ξ_2,ξ_3两两不相关；

（2）$D(\xi_1+\xi_2+\xi_3)=D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3$；（3）$E\xi_1\xi_2\xi_3=E\xi_1\cdot E\xi_2\cdot E\xi_3$之间的关系。

16、若ξ,η服从二元正态分布，$E\xi=a, D\xi=1, E\eta=b, D\eta=1$。证明：$\xi$与$\eta$的相关系数

$r=\cos q\pi$，其中$q=P\{(\xi-a)(\eta-b)<0\}$。

17、设(ξ,η)服从二元正态分布，$E\xi=E\eta=0, D\xi=D\eta=1, r_{\xi\eta}=r$，试证：

$E\max(\xi,\eta)=\sqrt{\dfrac{(1-r)}{\pi}}$。

18、设ξ与η独立，具有相同分布$N(a,\sigma^2)$，试求$p\xi+q\eta$与$u\xi+v\eta$的相关系数。

19、若ξ服从$N(a,\sigma^2)$，试求$E|\xi-a|^k$。

20、若α及β分别记二进制信道的输入及输出，已知$P\{\alpha=1\}=p, P\{\alpha=0\}=1-p,$

$P\{\beta=1|\alpha=1\}=q$，$P\{\beta=0|\alpha=1\}=1-q, P\{\beta=1|\alpha=0\}=r, P\{\beta=0|\alpha=0\}=1-r$，试求输出中含有输入的信息量。

21、在12只金属球中混有一只假球，并且不知道它比真球轻还是重，用没有砝码的天平来称这些球，试问至少需要称多少次才能查出这个假球，并确定它比真球轻或重。

22、试用母函数法求巴斯卡分布的数学期望及方差。

23、在贝努里试验中，若试验次数ν是随机变量，试证成功的次数与失败的次数这两个变量独立的充要条件，是ν服从普阿松分布。

24、设$\{\xi_k\}$是一串独立的整值随机变量序列，具有相同概率分布，考虑和$\eta=\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_\nu$，其中$\nu$是随机变量，它与$\{\xi_k\}$相互独立，试用（1）母函数法，（2）直接计算证明

$$E\eta=E\nu\cdot E\xi_k, D\eta=E\nu\cdot D\xi_k+D\nu\cdot(E\xi_k)^2。$$

25、若分布函数$F(x)=1-F(-x+0)$成立，则称它是对称的。试证分布函数对称的充要条件，是它的特征函数是实的偶函数。

26、试求$[0,1]$均匀分布的特征函数。

27、一般柯西分布的密度函数为$p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$，$\lambda>0$。证它的特征函数为$\exp\{i\mu t-\pi|t|\}$，利用这个结果证明柯西分布的再生性。

28、若随机变量ξ服从柯西分布，$\mu=0,\lambda=1$，而$\eta=\xi$，试证关于特征函数成立着$f_{\xi+\eta}(t)=f_{\xi}(t)\cdot f_{\eta}(t)$，但是$\xi$与$\eta$并不独立。

29、试求指数分布与$\Gamma-$分布的特征函数，并证明对于具有相同λ值的$\Gamma-$分布，关于参数r有再生性。

30、求证：对于任何实值特征函数$f(t)$，以下两个不等式成立：

$$1-f(2t)\le 4(1-f(t)),\ 1+f(2t)\ge 2(f(t))^2。$$

31、求证：如果$f(t)$是相应于分布函数$F(x)$的特征函数，则对于任何x值恒成立：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-itx}dt=F(x+0)-F(x-0)。$$

32、随机变量的特征函数为$f(t)$，且它的n阶矩存在，令$X_k=\frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k}{dt^k}\log f(t)\right]_{t=0}$，$k\le n$，称$X_k$为随机变量的k阶半不变量，试证$\eta=\xi+b$（$b$是常数）的$k(k>1)$阶半不变量等于$X_k$。

33、试求出半不变量与原点矩之间的关系式。

34、设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，具有相同分布$N(a,\sigma^2)$试求$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$的分布，并写出它的数学期望及协方差阵，再求$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$的分布密度。

35、若ξ服从二元正态分布$N(0,\Sigma)$，其中$\Sigma=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$，试找出矩阵$A$，使$\xi=A\eta$，且要求$\eta$服从非退化的正态分布，并求$\eta$的密度函数。

36、证明：在正交变换下，多元正态分布的独立、同方差性不变。

37、若(ξ,η)的分布为$p(\xi=k_1,\eta=k_2)=\frac{n!}{k_i!k_2!(n-k_1-k_2)!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}\quad 0<p_i<1$

$0\le k_i\le n\quad k_1+k_2\le n\quad i=1,2$，（1）求随机变量$\xi$的边际分布；（2）求$E(\eta|\xi)$。

38、若r,v,ξ的取值是非负数，且$p(\xi=n)=\frac{AB^n}{n!}$,又$E\xi=8$，求$A=?,B=?$

39、设$\xi\sim N(2,1),\eta\sim N(1,4)$且二者独立，求$U=\xi-2\eta\quad ,V=2\xi-\eta$的相关系数$\rho_{uv}$

40、某汽车站在时间t内发车的概率为P(t)=1-e^{-8t}，求某人等候发车的平均匀时间。

41、某厂生产的园盘的直径服从(a,b)内的均匀分布，求园盘面积的数学期望。

42、搜索沉船， 在时间 t 内发现沉船的概率为$P(t)=1-e^{-\lambda t}(\lambda>0)$ ， 求为了发现沉船所需要的平均搜索时间。

43、从数字$1,2,3,4$中按有放回方式取数，设随机变量ξ表示第一次选取的数字，随机变量η表示第二次选取的不小于ξ的数字. (1)写出(ξ,η)的联合分布列; (2)求$E\eta$.

44、如果ξ,η,ζ 互不相关,且方差分别为$1,3,6$,求$u=\xi+\eta, v=\eta+\zeta$ 的相关系数ρ_{uv}.

45、将三个球随机地放入三个盒子中去，设随机变量ξ,η分别表示放入第一个、第二个盒子中的球的个数。1)求二维随机变量(ξ,η)的联合分布列; 2)求$E\xi$

46、设$RV\xi,\eta$ 相互独立，且$E\xi=2,\ D\xi=1,\ E\eta=1,\ D\eta=4$，求$U=\xi-2,\ V=2\xi-\eta$ 的相关系数p_{uv}。

47、民航机场一送客汽车载有 20 个旅客从机场开出，旅客可从 10 个站下车，如果到站没人下车就不停车，假定乘客在每个车站下车是等可能的，求平均停车次数。

48、据统计，一个 40 岁的健康者在 5 年内死亡的概率为$1-p$，保险公司开办五年人寿保险，条件是参加者需要交保险费a元，若五年内死亡，公司赔偿b元$(b>a)$，问b应如何确定才能使公司可望受益？若有m个人参加保险，公司可望收益多少?

49、对敌人防御地段进行 100 次轰炸，每次命中目标的炸弹数是一个随机变量，其期望值是 2，方差是 1.69，求 100 次轰炸中有 180~220 颗命中目标的概率。

50、若有n把看上去样子相同的钥匙，其中只有 1 把打开门上的锁。用它们去试开门上的锁，设取得每把钥匙是等可能的。若每把钥匙试开后除去，求试开次数X的期望。

51、对球的直径作近似测量，其值均匀分布在区间$[a,b]$上。求球的体积的期望。

52、设X服从几何分布，它的概率分布列为：$P\{X=i\}=q^{i-1}p,\quad n=1,2,\cdots$，其中$q=1-p$，求$E(X)$，$D(X)$。

53、设离散随机变量X的分布列为$P\{X+i\}=\frac{1}{2},\ \ i=1,2,\cdots$，求$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的期望。

54、有 3 只球，4 只盒子，盒子的编号为$1,2,3,4$。将球随机地放入 4 只盒子中去。记X为其中至少有 1 只球的盒子的最小号码。求$E(X)$。

55、随机地掷 6 个骰子，利用切比雪夫不等式估计 6 个骰子出现点数之和在 15 点到 27 点之间的概率。

56、已知正常成人血液中，每毫升白细胞数平均是 7300，标准差是 700。利用切比雪夫不等式估计每毫

升男性成人血液中含白细胞数在 5200 至 9400 之间的概率 p。

57、一部件包括 10 部分，每部分的长度是一个随机变量，相互独立且服从同一分布、其期望是 2 mm，标准差是 0.05 mm。规定总长度为 $(20\pm 0.1)mm$ 时产品合格，求产品合格的概率。

58、根据以往的经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现随机取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率。

59、证明 Cuchy---Swchz 不等式，若 $E\xi^2\cdot E\eta^2$ 存在，则 $\left|E\xi\eta\right|^2\le E\xi^2\cdot E\eta^2$

60、设 r>0，则当 $E|\xi|^r$ 存在时，$\forall\varepsilon>0$，有 $P(|\xi|\ge\varepsilon)\le\dfrac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$。

61、若 $P(\xi=k)=pq^{k-1}\quad k=1,2,\cdots\quad p+q=1(p>0)$ 则 $E\xi=\dfrac{1}{p}$。

62、设 ξ 与 η 都只取两个数值，且 ξ 与 η 不相关，则 ξ 与 η 独立。

63、叙述并证明契比雪夫大数定律。

64、若 ξ 是取非负整数的随机变量，$E\xi,D\xi$ 均存在，则 $E\xi=\sum_{i=1}^{\infty}P(\xi\ge i)$。

65、设 (ξ,η) 的联合密度函数是 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}\left[x^2-2Rxy+y^2\right]}$，求证:

$$E\left[\max(\xi,\eta)\right]=\sqrt{\frac{1-R}{\pi}}$$

66、证明：对取值于区间 $[a,b]$ 中的随机变量 ξ 恒成立，$a\le E\xi\le b,\ D(\xi)\le\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$。

67、设随机变量 ξ 的方差 $D\xi$ 存在，c 为任一实数，证明：$D\xi\le E(\xi-c)^2$

68、设随机变量 ξ 的密度函数为：$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{n!}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，其中 n 为正整数，证明：

$$p\{0<\xi<2(n+1)\}\ge\frac{n}{n+1}$$

69、若 $RV\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且同分布，$E\xi_i=1,\ D\xi_i=1,\ i=1,2,3,\cdots,n$，试证：对任意的 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 有 $P\left\{0<\sum_{i=1}^{k}\xi_i<2k\right\}\ge\dfrac{(k-1)}{k}$

70、如果随机变量序列 $\{\xi_n\}$，当 $n\to\infty$ 时有 $\dfrac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)\to 0$，证明：$\{\xi_n\}$ 服从大数定律.

71、设 (ξ,η) 的密度函数是 $P(x.y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$ ，证明 ξ 与 η 不相关，且不独立。

72、设连续型 $R,V\xi$ 的密度函数为 $P(X)=\begin{cases}\dfrac{x^m}{m!}e^{-x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ (其中 m 为正整数)，试利用契贝晓夫不等式证明 $P(0<\xi<2(m+1))\ge\dfrac{m}{m+1}$.

73、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立随机变量序列，X_i 的分布列为

X	$-ia$	0	ia
p	$\frac{1}{2i^2}$		$1-\frac{1}{i^2}$
	$\frac{1}{2i^2}$		

i=1,2,$\cdots$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}p\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|\ge\varepsilon\right\}=0$

74、若 ξ 的密度函数是偶函数，且 $E\xi^2<\infty$，试证 $|\xi|$ 与 ξ 不相关，但它们不相互独立。

75、若 ξ,η 的密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & x^2+y^2>1\end{cases}$ ，试证：ξ 与 η 不相关，但它们不独立。

76、若 ξ 与 η 都是只能取两个值的随机变量，试证如果它们不相关，则独立。

77、若 $U=aX+b,V=cY+d$，试证 U,V 的相关系数等于 X,Y 的相关系数。

78、Pareto 分布的为密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{rA^r}{x^{r+1}}, & x\ge A\\ 0, & x<A\end{cases}$ ，这里 $r>0,A>0$，试指出这分布具有 p 阶矩，当且仅当 $p<r$。

79、若 ξ 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2|x|(\log|x|)^2}, & |x|>e\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ，试证对于任何 $a>0$，$E|\xi|^a=\infty$。

80、记 $a_k=E|\xi|^k$，若 $a_n<\infty$，试证，$\sqrt[k]{a_k}\le\sqrt[k+1]{a_{k+1}}$ ， $k=1,2,\cdots,n-1$。

81、试用母函数法证明二项分布及普阿松分布的再生性。

82、若分布函数 $F(x)=1-F(-x+0)$ 成立，则称它是对称的。试证分布函数对称的充要条件，是它的

特征函数是实的偶函数。

83、若随机变量 ξ 服从柯西分布，$\mu=0,\lambda=1$，而 $\eta=\xi$，试证关于特征函数成立着 $f_{\xi+\eta}(t)=f_{\xi}(t)\cdot f_{\eta}(t)$，但是 ξ 与 η 并不独立。

84、若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且服从相同分布 $N(0,1)$，试证 $\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ 服从参数为 n 的 X^2-分布，并说明 X^2-分布也有再生性。

85、求证：对于任何实值特征函数 $f(t)$，以下两个不等式成立：

$$1-f(2t)\le 4(1-f(t)),\ 1+f(2t)\ge 2(f(t))^2。$$

86、随机变量的特征函数为 $f(t)$，且它的 n 阶矩存在，令 $X_k=\frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k}{dt^k}\log f(t)\right]_{t=0}$，$k\le n$，称 X_k 为随机变量的 k 阶半不变量，试证 $\eta=\xi+b$（b 是常数）的 $k(k>1)$ 阶半不变量等于 X_k。

87、求证，在 $x>o$ 时有不等式 $\frac{x}{1+x^2}e^{-\frac{1}{2x^2}}\le\int_x^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\le\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}$。

88、若 ξ_k 具有有限方差，服从同一分布，但各 k 间，ξ_k 和 ξ_{k+1} 有相关，而 $\xi_k,\xi_l(|k-l|\ge 2)$ 是独立的，证明这时对 $\{\xi_k\}$ 大数定律成立。

第四章 解答

1、解：η 服从两点分布，由第二章第 29 题得，$P\{\eta=1\}=P$ {事件 A 出现奇数次}= $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n, P\{\eta=0\}=$ P{事件 A 出现偶数次} $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n$，所以

$$E\eta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n,$$

$$D\eta=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n\right]\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-2p)^{2n}.$$

2、解：设 ξ 表取一球的号码数。袋中球的总数为 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，所以

$$P\{\xi=k\}=\frac{k}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2k}{n(n+1)},\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n(n+1)}\cdot k=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}(2n+1).$$

3、解：由于 μ 是分布，所以应有 $\sum_{n=0}^{\infty}P\{\mu=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}A\cdot\frac{B^n}{n!}=1$，即 $Ae^B=1, A=e^{-B}$。又由已知

$E\mu=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{AB^n}{n!}=a$，即 $AB\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{n-1}}{(n-1)!}=a$，$ABe^B=a$，$\therefore B=a,\ A=e^{-B}=e^{-a}$。

4、解：设 μ 表示抽出 k 张卡片的号码和，ξ_i 表示第 i 次抽到卡片的号码，则 $\mu=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k$，因为是放回抽取，所以诸 ξ_i 独立。由此得，对 $i=1,2,\cdots,k$。

$$E\xi_i=\sum_{j=1}^{n}j\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2},$$

$$E\mu=E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_k=\frac{1}{2}k(n+1);$$

$$E\xi_i^{\ 2}=\sum_{j=1}^{n}j^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1),$$

$$D\xi_i=E\xi_i^{\ 2}-(E\xi_i)^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2=\frac{1}{12}(n^2-1),$$

$$D\mu=D\xi_1+D\xi_2+\cdots+D\xi_n=\frac{1}{12}k(n^2-1)。$$

5、证：$\sum_{k=1}^{\infty}P\{\xi\geq k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P\{\xi=j\}$

$$=\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}+P\{\xi=3\}+\cdots+P\{\xi=2\}+P\{\xi=3+\cdots+P\{\xi=3\}+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{\xi=k\}=E\xi.$$

6、解：$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\lambda}xe^{\frac{-|x-\mu|}{\lambda}}dx\qquad(令 t=\frac{(x-\mu)}{\lambda})$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda t+\mu}{2}e^{-|t|}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda t}{2}e^{-|t|}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{2}e^{-|t|}dt=0+\mu=\mu.$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\lambda}(x-\mu)^2 e^{\frac{-|x-\mu|}{\lambda}} \qquad (令 t=\frac{(x-\mu)}{\lambda})$$

$$=\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t}dt=\lambda^2t^2(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}+2\lambda^2\int_0^{\infty}te^{-t}dt$$

$$=2\lambda^2t(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}+2\lambda^2\int_0^{\infty}te^{-t}dt=2\lambda^2(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}=2\lambda^2.$$

7、证： $\xi_1\xi_2$ 的联合密度为 $p(x,y)=\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$，

$\therefore \quad E\max(\xi_1,\xi_2)=\iint\max(x,y)p(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{x}xp(x,y)dy+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{x}^{\infty}yp(x,y)dy$$

（利用密度函数的积分值为 1，减 a 再加 a）

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-a)p(x,y)dy+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{x}^{\infty}(y-a)p(x,y)dy+a$$

（在前一积分中交换积分次序，在后一积分中交换 x 与 y 的记号）

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{y}^{\infty}(x-a)p(x,y)dx+\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{y}^{\infty}(y-a)p(x,y)dx+a$$

$$=a+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy\int_{y}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (令\frac{(y-a)}{\sigma}=t)$$

$$=a+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma e^{-t^2}dt=a+\frac{\sigma}{\pi}\sqrt{\pi}=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

8、解： 令 B 表"从乙袋摸一球为白球"，ξ 表从甲袋所摸个球中白球数，则 ξ 取值 $0,1,\cdots,c$，服从超几何分布，且 $E\xi=\frac{ca}{(a+b)}$，考虑到若 $c>a$，则当 $i=a+1,\cdots,c$ 时 $P\{\xi=i\}=0$；若 $c>b$，则当 $i<c-b$ 时 $P\{\xi=i\}=0$；而在条件概率定义中要求 $P(A_i)=P\{\xi=i\}>0$ 由此得

$$P(B)=\sum_{i=\max(0,c-b)}^{m!n(a,c)}P\{\xi=i\}P\{B|\xi=i\}=\sum_{i=0}^{\alpha}P\{\xi=i\}\frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+c}$$

$$=\frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+c}\sum_{i=0}^{\alpha}P\{\xi=i\}+\frac{1}{\alpha+\beta+c}\sum_{i=0}^{\alpha}i\,P\{\xi=i\}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+c}+\frac{E\xi}{\alpha+\beta+c}=\frac{1}{\alpha+\beta+c}\left(\alpha+\frac{ac}{a+b}\right).$$

9、解： 令 $\xi_i=\begin{cases}1, & 从第i袋子中摸出白球\\ 0, & 从第i袋子中摸出黑球\end{cases}$，则

$$P\{\xi_1=1\}=\frac{a}{(a+b)},$$

$$P\{\xi_2=1\}=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a^2+ab+a}{(a+b)(a+b+1)}=\frac{a}{a+b}。$$

由此类推得 $P\{\xi_1=1\}=\dfrac{a}{(a+b)}$， $i=1,2,\cdots,n$。又 $S_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$，

$$\therefore ES_n=\sum_{i=1}^{n}E\xi=\frac{na}{a+b}。$$

10、**解**：以 ξ_i 表第 i 次测量值，由于受测量过程中许多随机因素的影响，测量值 ξ_i 和物体真实重量 a 之间有偏差，ξ_i 是独立同分布的随机变量，并有 $E\xi_i=a, D\xi_i=\sigma^2$。测量记录的平均值记为 η，则 $\eta=\dfrac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n)$

$$E\eta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=\frac{na}{n}=a，\qquad D\eta=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}。$$

平均值 η 的均值仍为 a，但方差只有 ξ_i 方差的 $\dfrac{1}{n}$，而方差是描述随机变量对于其数学期望的离散程度，所以以 η 作为物体的重量，则更近于真值。

11、**证**：设 $f(x)$ 是 ξ 的密度函数，则 $f(-x)=f(x)$。由 $xf(x)$ 是奇函数可得 $E\xi=0$，从而 $E\xi E|\xi|=0$。又由于 $x|x|f(x)$ 是奇函数，得

$$E\xi|\xi|=\int_{-\infty}^{\infty}x|x|f(x)dx=0=E\xi E|\xi|$$

故 $|\xi|$ 与 ξ 不相关。

由于 ξ 的密度函数是偶函数，故可选 $c>0$ 使 $0<P\{|\xi|<c\}<1$，亦有 $P\{\xi<c\}<1$，

$$\therefore P\{\xi<c\}P\{|\xi|<c\}\neq P\{|\xi|<c\}=P\{\xi<c,|\xi|<c\}$$

其中等式成立是由于 $\{|\xi|<c\}\subset\{\xi<c\}$。由此得 $|\xi|$ 与 ξ 不独立。

12、**证**：$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{\pi}dy=0$，同理 $E\eta=0$。

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}ydy=0$$

即ξ与η不相关。但ξ与η不独立，事实上可求得

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases},\quad p_\eta(x)=\begin{cases}\frac{2}{y}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1\\ 0, & |y|>1\end{cases},$$

而当$|x|\le 1$且$|y|\le 1$时，$p(x,y)\ne p_\xi(x)p_\eta(y)$。

13、证：设$\begin{pmatrix}a, & b\\ p_1, & q_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c, & d\\ p_2, & q_2\end{pmatrix}$。作两个随机变量

$$\xi^*=\xi-b:\begin{pmatrix}a-b, & 0\\ p_1, & q_1\end{pmatrix},\eta^*=\eta-d:\begin{pmatrix}c-d, & 0\\ p_2, & q_2\end{pmatrix}。$$

由ξ与η不相关即$E\xi\eta=E\xi E\eta$得

$$E\xi^*\eta^*=E(\xi\eta-b\eta-d\xi+bd)=(E\xi E\eta-bE\eta-dE\xi+bd)$$

$$=(E\xi-b)(E\eta-d)=E\xi^*E\eta^*,$$

而$E\xi^*\eta^*=(a-b)(c-d)P\{\xi^*=a-b,\eta^*=c-d\}$，

$E\xi^*E\eta^*=(a-b)P\{\xi^*=a-b\}\ (c-d)P\{\eta^*=c-d\}$，

由上两式值相等，再由$(a-b)(c-d)\ne 0$得

$$P\{\xi^*=a-b,\eta^*=c-d\}=P\{\xi^*=a-b\}P\{\eta^*=c-d\}$$

此即$P\{\xi=a,\eta=c\}=P\{\xi=a\}\ P\{\eta=c\}$。同理可证

$P\{\xi=a,\eta=d\}=P\{\xi=a\}\ P\{\eta=d\}$，$P\{\xi=b,\eta=c\}=P\{\xi=b\}\ P\{\eta=c\}$

$P\{\xi=b,\eta=d\}=P\{\xi=b\}\ P\{\eta=d\}$，

从而ξ与η独立。

14、证：$EU=aEX+b,DU=a^2DX$，$EV=cEY+d,DV=c^2DY$，

$$\mathrm{cov}(U,V)=Ea(X-EX)c(Y-EY)=ac\cdot\mathrm{cov}(X,Y),$$

$$r_{UV}=\frac{\mathrm{cov}(U,V)}{|a|\sqrt{DX}\,|c|\sqrt{D(Y)}}=\frac{ac}{|ac|}r_{xy}。$$

欲$r_{UV}=r_{xy}$，题中需补设a与c同号。

15、**解**：（一）证(1)⇨(2)，设（1）成立，即两两不相关，则

$$D(\xi_1+\xi_2+\xi_3)=E[(\xi_1+\xi_2+\xi_3)-(E\xi_1+E\xi_2+E\xi_3)]^2$$

$$=E[(\xi_1-E\xi_1)+(\xi_2-E\xi_2)+(\xi_3-E\xi_3)]^2$$

$$=D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3+2E(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)$$

$$+2E(\xi_1-E\xi_1)(\xi_3-E\xi_3)+2E(\xi_2-E\xi_2)(\xi_3-E\xi_3)$$

$$=D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3,$$

∴（2）成立。

（二）(1)$\not\Rightarrow$(3)。设

$$\xi_1:\begin{pmatrix}-1, & 1\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \xi_2:\begin{pmatrix}-1, & 1\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

并设ξ_1与ξ_2独立，则

$$\xi_1\,\xi_2=\xi_3\text{（记）}:\begin{pmatrix}-1, & 1\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \xi_1\,\xi_2\,\xi_3=\xi_3^2:\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

由第三章25题知，$\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$两两独立，从而两两不相关，满足（1）。而$E\xi_1=E\xi_2=0$，这时

$E\xi_1\cdot E\xi_2\cdot E\xi_3=0\neq 1=E\xi_1\xi_2\xi_3$，（3）不成立。

（三）(2)$\not\Rightarrow$(1)。设$D\xi>0,\xi_1=\xi_2=\xi,\xi_3=-\frac{1}{2}\xi$，则

$$D(\xi_1+\xi_2+\xi_3)=D(\xi+\xi-\frac{1}{2}\xi)=D\left(\frac{1}{2}\xi\right)=2\frac{1}{4}D\xi\text{。}$$

$$D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3=D\xi+D\xi+D\left(-\frac{1}{2}\xi\right)=2\frac{1}{4}D\xi,$$

满足（2）。但显然ξ_1,ξ_2,ξ_3两两相关，事实上由$E\xi^2-(E\xi)^2=D\xi\neq 0$得$\xi$与$\xi$相关，（1）不成立。

（四）(2)$\not\Rightarrow$(3)。事实上，由(1)⇨(2)，(1)$\not\Rightarrow$(3)得必有(2)$\not\Rightarrow$(3)。

（五）(3)$\not\Rightarrow$(2)。设

$$\xi_1:\begin{pmatrix}-1, & 0\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \xi_2=\xi_1+1:\begin{pmatrix}0, & 1\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \xi_3:\begin{pmatrix}-1, & 1\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

则

$$\xi_1\xi_2:\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \xi_1\xi_2\xi_3=\xi_3^2:\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

再设ξ_1与ξ_3独立，从而ξ_1的函数ξ_2与ξ_3也独立，我们有$E\xi_1=-\dfrac{1}{2}, E\xi_2=\dfrac{1}{2}$，

$E\xi_3=0$， $E\xi_1\xi_2=0,\ E\xi_1\xi_3=E\xi_1\cdot E\xi_3=0,\ E\xi_2\xi_3=E\xi_2\cdot E\xi_3=0$， $E\xi_1\xi_2\xi_3=0=E\xi_1\cdot E\xi_2\cdot E\xi_3$，

满足（3）。但

$$D(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$$

$$=D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3+2E\xi_1\xi_2+2E\xi_1\xi_3+2E\xi_2\xi_3-2E\xi_1\cdot E\xi_2-2E\xi_1\cdot E\xi_3-2E\xi_2\cdot E\xi_3$$

$$=D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3-2E\xi_1\cdot E\xi_2$$

$$=D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3+\frac{1}{2}\neq D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3。$$

∴（2）成立。

（六）(3)$\not\Rightarrow$(1)。事实上，由(1)⇨(2)，(3)$\not\Rightarrow$(2)得必有(3)$\not\Rightarrow$(1)。

（七）当ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立时，(1)，(2)，(3)同时成立。

16、证：由题设得

$$q=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\iint_{(x-a)(y-b)<0}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\times\left[(x-a)^2-2r(x-a)(y-b)+(y-b)^2\right]\right\}dxdy$$ （ 令 $u=x-a, v=y-b$）

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\iint_{uv<0}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(u^2-2ruv+v^2)}dudv$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\times\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(u^2-2ruv+v^2)}dudv$$

令$u=\rho\cos\theta, v=\rho\sin\theta, |J|=\rho$，则

$$q=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_{\rho}^{\infty}\rho e^{-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}(1-r\sin2\theta)}d\rho$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[-\frac{1-r^2}{1-r\sin2\theta}e^{-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}(1-r\sin2\theta)}\right]_0^{\infty}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\theta}{1-r\sin 2\theta}\quad(令\alpha=2\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\alpha}{1-r\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}arctg\frac{tg\frac{1}{2}\alpha-r}{\sqrt{1-r^2}}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

由 $\lim\limits_{\alpha\downarrow\pi} tg\frac{\alpha}{2}=-\infty$，而 $\lim\limits_{\alpha\downarrow\pi} arctg\frac{tg\frac{1}{2}\alpha-r}{\sqrt{1-r^2}}=-\frac{\pi}{2}$ 得 $q=\frac{1}{\pi}arctg\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{1}{2}$，即 $tg\left[\left(q-\frac{1}{2}\right)\pi\right]=\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}$，变形得

$$-ctgq\pi=-\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},\quad 或\ ctg^2 q\pi=\frac{r^2}{1-r^2},$$

所以
$$r^2=\frac{ctg^2 q\pi}{1+ctg^2 q\pi}=\sin^2 q\pi\cdot ctg^2 q\pi=\cos^2 q\pi\ 。$$

注意到 $0<q<1$，且 r 与 $ctgd\pi$ 同号，即 r 与 $\cos q\pi$ 同号，故得 $r=\cos q\pi$（其中 $q=P\{(\xi-a)(\eta-b)<0\}$）。

17、证：由题设得

$$E\max(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\max(x,y)}{2\pi\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2xy+y^2)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{X}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2xy+y^2)}dy+\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{Y}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2xy+y^2)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{X}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2xy+y^2)}dy$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}}e^{-\frac{(y-rx)^2}{2(1-r^2)}}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

用部分积分法，令，余下部分为，得。

18、解：记 $S=p\xi+q\eta, T=u\xi+v\eta$，则

$$ES=pa+qa=(p+q)a,\quad ET=(u+v)a,$$

$$DS=(p^2+q^2)\sigma^2,\quad DT=(u^2+v^2)\sigma^2\quad ,$$

$$\operatorname{cov}ST=E(p(\xi-a)+q(\eta-a))(u(\xi-a)+v(\eta-a))=pu\sigma^2+qv\sigma^2\quad ,$$

$$\therefore r_{ST}=\frac{pu+qv}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{u^2+v^2}}。$$

19、解：$E|\xi-a|^k=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x-a|^k e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx\left(令 u=\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^k|u|^k e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k\int_0^{\infty}u^k e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k u^{k-1}\left(-e^{-\frac{u^2}{2}}\right)\Bigg|_0^{\infty}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k(k-1)\int_0^{\infty}u^{k-2}e^{-\frac{u^2}{2}}du。$$

当 k 为偶数时

$$E|\xi-a|^k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k(k-1)(k-3)\cdots3\cdot1\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1\cdot3\cdot5\cdots(k-3)(k-1)\sigma^k$$

当 k 为奇数时

$$E|\xi-a|^k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k(k-1)(k-3)\cdots4\cdot2\cdot\int_0^{\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}du=2\cdot4\cdot\cdots(k-3)(k-1)\sigma^k\sqrt{\frac{2}{\pi}}。$$

20、解：$P\{\beta=1\}=P\{\beta=1,\alpha=0\}+P\{\beta=1,\alpha=1\}$

$$=P\{\beta=1|\alpha=0\}P\{\alpha=0\}+P\{\beta=1|\alpha=1\}P\{\alpha=1\}$$

$$=(1-p)r+pq$$

$$P\{\beta=0\}=P\{\beta=0,\alpha=0\}+P\{\beta=0,\alpha=1\}$$

$$=P\{\beta=0|\alpha=0\}P\{\alpha=0\}+P\{\beta=0|\alpha=1\}P\{\alpha=1\}$$

$$=(1-p)(1-r)+(1-q)p$$

$$P\{\beta=1\}+P\{\beta=0\}=1。$$

$$H(出)=H(\beta)=-[(1-p)r+pq]\log[(1-p)r+pq]-[p(1-q)+(1-p)(1-r)]\times$$

$$\times\log[p(1-q)+(1-p)(1-r)],$$

$$H_{\lambda}(出)=H_{\alpha}(\beta)$$

$$=-P\{\alpha=0\}[P\{\beta=1|\alpha=0\}\log P\{\beta=1|\alpha=0\}$$

$$+P\{\beta=0|\alpha=0\}\log P\{\beta=0|\alpha=0\}]$$

$$-P\{\alpha=1\}[P\{\beta=0|\alpha=1\}\log P\{\beta=0|\alpha=1\}$$

$$+P\{\beta=1|\alpha=1\}\log P\{\beta=1|\alpha=1\}]$$

$$=-(1-p)[r\log r+(1-r)\log(1-r)]-p[(1-q)\log(1-q)+q\log q]$$

所以输出中含有输入的信息量 H（入）－H 出（入）为

H（入）－H 出（入）＝H（出）－H 入（出）

$$=-[(1-p)r+pq]\log[(1-p)r+pq]-[p(1-q)+(1-p)(1-r)]\log[p(1-q)$$

$$+(1-p)(1-r)]+(1-p)r\log r+(1-p)(1-r)\log(1-r)+p(1-q)\log(1-q)+pq\log q。$$

21、解：需要确定其结局的实验 β 有 24 个可能结局，即 12 个是假球，且它比真的轻或重。若认为全部结局是等概的，则实验 β 的熵 $H(\beta)=\log 24$，即需要得到 $\log 24$ 个单位信息。由称一次（随便怎样的）所构成的实验 α，可以有 3 个结局（即天平可以向右斜或向左斜或保持平衡），进行 k 次复合试验 $A_k=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 后，可得到不大于 $k\log 3=\log 3^k$ 的信息，而 $3^2<24<3^3$，所以至少得称三次才可以称出假球，且判明它比真球轻或重。

具体称法共有十几种，详见雅格洛姆著："概率与信息"，这里仅取一法叙述如下：

第一次称：天平两端分放 1、2、3、4 和 5、6、7、8，下余 I、II、III、IV。

（A）若第一次称时平衡，则假球在 I、II、III、IV 中。

第二次称：天平两端分放 I、II 和 III、1，注意 1 是真球。

（AA）若第二次称时平衡，则 IV 是假球；再把 1 和 IV 分放天平两端称第三次，可判别假球 IV 比真球 1 轻或重。

（AB）若第二次称进 I、II 较重（或轻），

第三次称：天平两端分放 I 和 II。

（ABA）若第三次称时平衡，则 II 是假球，且比真球较轻（或重）。

（ABB）若第三次称时不平衡，则与（AB）中同重（或轻）的那球是假球，且它比真球较重（或轻）。

（B）若长一资助称时 1、2、3、4 较重，则假球在天平上。

第二次称：天平两端分放 1、2、5 和 3、4、6。

（BA）若第二次称时平衡，则 7、8 中之一为假球，由第一次称的结果知假球较轻，再把 7 和 8 分放天平两端称第三次，即可假球。

（BB）若第二次称时 1、2、5 较重，则或 1、2 中之一为假球，且它比真球较重，或 6 是假球且它比真球较轻。

第三次称：天平两端分放 1 和 2。

（BBA）若第三次称进平衡，则 6 是假球且比真球轻。

（BBB）若第三次称时不平衡，则较重的一球是假球，且它比真球重。

（C）若第一次称时 5、6、7、8 较重，则只需把（B）中编号 1、2、3、4 与 5、6、7、8 依次互换，即得称法。

22、**解：** 巴斯卡分布为 $P\{\xi=n\}=C_{n-1}^{k-1}q^{n-k}p^k,\quad n=k,k+1,\cdots$。其母函数为

$$P(s)=\sum_{n=k}^{\infty}C_{n-1}^{k-1}q^{n-k}p^ks^n\,(令 m=n-k)$$

$$=p^k\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+k-1}^{k-1}q^ms^ms^k=p^ks^k\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+k-1}^{m}(qs)^m=\frac{p^ks^k}{(1-qs)^k}。$$

$$E\xi=P'(1)=p^k\left[\frac{ks^{k-1}(1-qs)^k+ks^k(1-qs)^{k-1}q}{(1-qs)^{2k}}\right]_{s=1}=\left[\frac{kp^ks^{k-1}}{(1-qs)^{k+1}}\right]_{s=1}=\frac{k}{p},$$

$$P''(1)=\left[\frac{kp^ks^{k-1}}{(1-qs)^{k+1}}\right]'_{s=1}=kp^k\left[\frac{(k-1)s^{k-2}(1-qs)^{k+1}+(k+1)(1-qs)^kqS^{K-1}}{(1-qs)^{2k+2}}\right]_{s=1}$$

$$=kp^k\cdot\frac{(k-1)(1-q)^{k+1}+(k+1)(1-q)^kq}{(1-qs)^{2k+2}}=\frac{k^2+kq}{p^2}-\frac{k}{p},$$

$$D\xi=P''(1)+p'(1)-[P'(1)]^2=\frac{k^2+kq}{p^2}-\frac{k}{p}+\frac{k}{p}-\left(\frac{k}{p}\right)^2=\frac{kq}{p^2}。$$

23、证：设，$\xi_i=\begin{cases}1, & 第 i 次成功\\ 0, & 第 i 次失败\end{cases}\qquad \eta_i=\begin{cases}1, & 第 i 次失败\\ 0, & 第 i 次成功\end{cases}$

$$P\{\xi_i=1\}=P\{\eta_i=0\}=p,\quad P\{\xi_i=0\}=P\{\eta_i=1\}=1-p\ 。$$

则 ξ_i 的母函数为 $F_1(s)=(1-p)s^0+ps^1=1-p+ps$。

同理可得 η_i 的母函数为 $F_2(s)=p+(1-p)s$，ν 的母函数记为 $G(s)$。以 ξ 表示成功次数，则 $\xi=\xi_1+\cdots+\xi_\nu$，本题认为 $\{\xi_n\}$ 与 ν 独立，得 ξ 的母函数为 $P_\xi(s)=G[F_1(s)]$。同理，以 η 表示失败次数，则 $\eta=\eta_1+\cdots\eta_\nu$，其母函数为 $P_\eta(s)=G[F_2(s)]$。

必要性。设 ξ 与 η 独立，则由 $\nu=\xi+\eta$ 得

$$G(1-p+ps)\cdot G[p+(1-p)s]=G(s)。$$

因为 $(1-p+ps)+(p+s-ps)=1+s$，所以若记上式左边 G 的变量分别为 x,y，可得

$$G(x)G(y)=G(x+y-1)\text{。}$$

令 $G(x)=T(x-1)$，则上式变成

$$T(x-1)T(y-1)=T(x+y-1-1)=T[(x-1)+(y-1)]\text{。}$$

利用教本 P97 引理可得

$$G(x)=T(x-1)=a^{x-1}=e^{(x-1)}\text{。}$$

即 ν 的母函数 $G(s)=\exp\{\lambda(s-1)\}$，这是普阿松分布的母函数。由于母函数与分布列之间是相互唯一确定的，所以得 ν 是服从普阿松分布的随机变量。

充分性。设 ν 服从普阿松分布，参数为 λ，则

$$P\{\xi=r\}=\sum_{n=r}^{\infty}P\{\nu=n\}P\{\xi_1+\cdots+\xi_\nu=r\mid\nu=n\}$$

$$=\sum_{n=r}^{\infty}P\{\nu=n\}P\{\xi_1+\cdots+\xi_\nu=r\}=\sum_{n=r}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}C_n^r p^r(1-p)^{n-1}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{r!}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{(n-r)!}[\lambda(1-p)]^{n-r}(\lambda p)^r=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^r}{r!}\text{。}$$

同理可得 $$P\{\eta=t\}=e^{-\lambda(1-p)}\frac{\left[\lambda(1-p)^t\right]}{t!}\text{。}$$

又有 $P\{\xi=r,\eta=r\}=P\{\nu=r+t\}P\{\xi=r\mid\nu=r+t\}$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r+t}}{(r+t)!}C_{r+1}^r p^r(1-p)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r+t}p^r(1-p)^t}{r!t!}=P\{\xi=r\}P\{\eta=t\}\text{。}$$

再由 r,t 的任意性即得证 ξ 与 η 独立。

24、证：（1）设 ξ_i 的母函数为 $F(s)$， ν 的母函数为 $G(s)$。而 $\eta=\xi_1+\cdots+\xi_\nu$，所 $P_\eta(s)=G[F(s)]$。由此得

$$E\eta=P'_\eta(1)=\{G'[F(s)]\cdot F'(s)\}_{s=1}=G'(1)\cdot F'(1)=E\nu\cdot E\xi_k$$

其中 $F(1)=\sum_{j=0}^{\infty}P\{\xi_i=j\}\cdot 1^j=\sum_{j=0}^{\infty}\{\xi_i=j\}=1$。

$$D\eta=P''_\eta(1)+P'_\eta(1)-\left[P'_\eta(1)\right]^2$$

$$=\left\{G'\left[F(s)\right]\cdot\left[F'(s)\right]^2+G'[F(s)]\cdot F''(s)\right\}_{s=1}+F'(1)G'(1)-[F'(1)\cdot G'(1)]^2$$

$$=G''(1)\left[F'(1)\right]^2+G'(1)\cdot F''(1)+F'(1)\cdot G'(1)-[F'(1)\cdot G'(1)]^2$$

$$=G'(1)\left\{F''(1)+F'(1)-\left[F'(1)\right]^2\right\}+[F'(1)]^2\{G''(1)+G'(1)-[G'(1)]^2$$

$$=Ev\cdot D\xi_k+Dv\cdot(E\xi_k)^2\text{。}$$

（2）直接计算。由题设得

$$P\{\eta=i\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=m\}P\{\xi_1+\cdots+\xi_n=i\mid v=m\}$$

$$E\eta=\sum_{i=0}^{\infty}i\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=n\}P\{\xi_1+\cdots+\xi_n=i\mid v=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=n\}\sum_{i=0}^{\infty}iP\{\xi_1+\cdots+\xi_n=i\}$$

利用 $E(\xi_1+\cdots+\xi_n)=nE\xi_1$ 得

$$E\eta=\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=n\}nE\xi_1=Ev\cdot E\xi_1\text{。}$$

$$E\eta^2=\sum_{i=0}^{\infty}i^2\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=n\}P\{\xi_1+\cdots+\xi_n=i\mid v=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=n\}\sum_{i=0}^{\infty}i^2P\{\xi_1+\cdots+\xi_n=i\}$$

记 $\xi=\xi_1+\cdots+\xi_n$，利用 $E\xi^2=D\xi+(E\xi)^2$ 及 $D\xi=nD\xi_1$ 得

$$E\eta^2=\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=n\}\left(D(\xi_1+\cdots+\xi_n)+[E(\xi_1+\cdots+\xi_n)]^2\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{v=n\}\left[nD\xi_1+n^2(E\xi_1)^2\right]$$

$$=Ev\cdot D\xi_1+(E\xi_1)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}n^2P\{v=n\}\right)$$

最后，再利用 $Ev^2=Dv+(Ev)^2$ 得 $E\eta^2=Ev\cdot D\xi_1+Dv\cdot(E\xi_1)^2+(Ev)^2\cdot(E\xi_1)^2$。

$$\therefore\quad D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=Ev\cdot D\xi_1+Dv\cdot(E\xi_1)^2\text{。}$$

25、证：必要性。由 $F(x)=1-F(-x+0)$ 得 $P\{\xi<x\}=P\{\xi>-x\}=P\{-\xi<x\}$，此即 $F_\xi(x)=F_{-\xi}(x)$，所以对特征函数 $f(t)$ 有

$$f(t)=Ee^{it\xi}=\int e^{itx}dF_\xi(x)=\int e^{itx}dF_{-\xi}(x)=Ee^{-it\xi}=\overline{f(t)},$$

由此知 $f(t)$ 是实函数。又有

$$f(-t)=\int e^{-itx}dF_{\xi}(x)=\int e^{-itx}dF_{-\xi}(x)=Ee^{-it(-\xi)}=Ee^{it\xi}=f(t),$$

所以 $f(t)$ 又是偶函数。

充分性。由于 $\overline{f_{\xi}(-t)}=Ee^{-it\xi}=Ee^{it(-\xi)}=f_{-\xi}(t)$，又由题设知 $f_{\xi}(t)$ 是实函数，所以 $f_{\xi}(t)=\overline{f_{\xi}(t)}=f_{-\xi}(t)$。由唯一性定理知，$\xi$ 与 $-\xi$ 的分布函数相同，$F_{\xi}(x)=F_{-\xi}(x)$，即 $P\{\xi<x\}=P\{-\xi<x\}=P\{\xi>-x\}$，从而 $F(x)=1-F(-x+0)$。

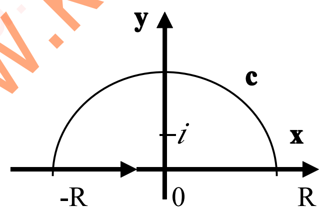
26、解：$p_{\xi}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$。当 $t=0$ 时 $f(t)-1$；当 $t\neq 0$ 时

$$f(t)=\int_0^1 e^{itx}dx=\frac{1}{it}e^{itx}\Big|_0^1=\frac{1}{it}(e^{it}-1)。$$

27、证：$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}dx\left(令 u=\frac{x-\mu}{\lambda}\right)$

$$=\frac{1}{\pi}e^{it\mu}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}du \qquad (1)$$

考虑复变函数的积分，当 $t>0$，取 c 为上半圆周 $\rho=\mathrm{Re}^{i\theta}(0\le\theta\le\pi)$ 和实轴上从 $-R$ 到 R 的围道（如图），若 u 位于上半圆周上，则 $u=\mathrm{Re}^{i\theta}$，$du=i\mathrm{Re}^{i\theta}d\theta$，有



$$\int_C e^{it\lambda z}\frac{1}{1+z^2}dz=\int_{-R}^{R}e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}du+\int_0^{\pi}iRe^{i\theta}\frac{e^{it\lambda \mathrm{Re}^{i\theta}}}{1+R^2e^{i\theta}}d\theta=I_1+I_2 \qquad (2)$$

对 I_1 有 $\lim\limits_{R\to\infty}I_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}du$。

由 $t>0$ 及题设 $\lambda>0$ 得 $0<e^{-t\lambda R\sin\theta}\le 1$，所以对 I_2 有

$$|I_2|\le R\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{it\lambda R\sin\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}\right|d\theta\le\frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi}e^{-\lambda tR\sin\theta}d\theta$$

$$<\frac{R\pi}{R^2-1}\to 0 \quad （当 R\to+\infty 时） \qquad (3)$$

在上半平面上，仅有 $z=i$ 是被积函数的一阶极点，由复变函数中留数定理得，对任何 $R>1$ 有

$$\int_C e^{it\lambda z}\frac{1}{1+z^2}dz=2\pi i\cdot c_{-1}=2\pi i\frac{e^{-\lambda t}}{2i}=e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

其中

$$c_{-1}=\lim_{z\to i}\frac{e^{i\lambda tz}}{1+z^2}(z-i)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i\lambda tz}}{(z+i)(z-i)}(z-i)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i\lambda tz}}{z+i}=\frac{1}{2i}e^{i\lambda ti}=\frac{1}{2i}e^{-\lambda t}$$

把（2)，(3)，(4）代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}du=\pi e^{-\lambda t} \tag{5}$$

由于 $e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}=\frac{1}{1+u^2}\cos t\lambda u+\frac{i}{1+u^2}\sin t\lambda u$，$\frac{\sin t\lambda u}{(1+u^2)}$ 是 u 的奇函数，它在 $(-\infty,\infty)$ 上积分值为 0；$\frac{\cos t\lambda u}{(1+u^2)}$ 是的偶函数，当 $t<0$ 时，其积分值应与 $t>0$ 时积分值相等；再注意到（5）中右端 $t>0$，所以当 $t<0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}du=\pi e^{-\lambda|t|} \tag{6}$$

当 $t=0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}du=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda u}\frac{1}{1+u^2}du=\pi=\pi e^{-\lambda\cdot 0} \tag{7}$$

把（5）—（7）代入（1）式得，对任意有

$$f(t)=\exp\{it\mu-\lambda|t|\}。$$

现证柯西分布具有再生性。设 $\xi_1(i=1,2)$ 的特征函数为 $f_i(t)=\exp\{it\mu_i-\lambda_i|t|\}$，再设 ξ_1 与 ξ_2 独立，$\eta=\xi_1+\xi_2$，则

$$f_\eta(t)=f_1(t)f_2(t)=\exp\{it(\mu_1+\mu_2)-(\lambda_1+\lambda_2)|t|\},$$

所以 η 仍服从柯西分布，且参数为 $\mu_1+\mu_2,\lambda_1+\lambda_2$。

28、证：由上题得 $f_\xi(t)=f_\eta(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$，所以由 $\xi+\eta=2\xi$ 得

$$f_{\xi+\eta}(t)=f_{2\xi}(t)=\mathrm{e}^{-|2t|}=\mathrm{e}^{-2|t|}=f_\xi(t)\cdot f_\eta(t)。$$

但 ξ 与 η 并不独立，事实上，可取 c 使 $0<P\{\xi<c\}<1$，则

$$P\{\xi<c,\eta<c\}=P\{\xi<c\}\neq P\{\xi<c\}\cdot P\{\eta<c\},$$

这说明由 ξ 与 η 独立可推得 $f_{\xi+\eta}(t)=f_\xi(t)\cdot f_\eta(t)$，但反之不真。

29、解：(1）指数分布。当 $x\ge 0$ 时，其密度函数为 $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，所以它的特征函数为

$$f(t)=\int_0^{\infty}e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{\infty}\lambda e^{x(-\lambda+it)}dx=\frac{\lambda}{it-\lambda}e^{x(it-\lambda)}\Big|_o^{\infty}=\frac{\lambda}{it-\lambda}=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1},$$

其中$|e^{x(it-\lambda)}|=e^{-\lambda x}\to 0(x\to\infty)$。

（2）$\Gamma-$分布。当$x>0$时，其密度函数为$p(x)=\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}$，为求其特征函数，我们指出，对复数$z=b+ic$，只要$b>0$，就有如下等式成立：

$$\int_0^\infty x^{r-1}e^{-zx}dx=\frac{\Gamma(r)}{z^r}。$$

利用此式可求得$\Gamma-$分布的特征函数为

$$f(t)=\int_0^\infty e^{itx}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^\infty x^{r-1}e^{-(\lambda-it)x}dx$$

$$=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{\Gamma(r)}{(\lambda-it)^r}=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-r}。$$

现证$\Gamma-$分布具有再生性。设$\xi_1\sim G(\lambda,r_1),\xi_2\sim G(\lambda,r_2)$，则它们的特征函数分别为

$$f_1(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-r_1}，\quad f_2(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-r_2}，$$

再设ξ_1与ξ_2独立，$\eta=\xi_1+\xi_2$，则有

$$f_\eta(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-r_1-r_2}，$$

所以服从$\Gamma-$分布，$\Gamma-$分布具有献策性。

30、证：$f(t)$是实值函数，复数部分为 0，只需对实部计算。

$$1-f(2t)=\int_{-\infty}^\infty(1-\cos 2tx)dF(x)=\int_{-\infty}^\infty 2\sin^2 tx dF(x)$$

$$=2\int_{-\infty}^\infty(1-\cos tx)(1+\cos tx)dF(x)\le 4\int_{-\infty}^\infty(1-\cos tx)dF(x)=4(1-f(t))。$$

$$1+f(2t)=\int_{-\infty}^\infty(1+\cos 2tx)dF(x)=2\int_{-\infty}^\infty 2\cos^2 tx dF(x)$$

$$\ge 2\left(\int_{-\infty}^\infty\cos tx dF(x)\right)^2=2(f(t))^2,$$

其中利用柯西——许瓦兹不等式（置$\varphi(x)=\cos tx,\psi(x)=1$）

$$\left[\int\varphi(x)\psi(x)dF(x)\right]^2\le\left(\int\varphi^2(x)dF(x)\right)\left(\int\psi^2(x)dF(x)\right)。$$

31、证：$I=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^T f(t)e^{-itx}dt=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^T\left(\int_{-\infty}^\infty e^{it(y-x)}dF(y)=\right)dt$。

由于$\left|e^{it(y-x)}\right|=1$，所以$e^{it(y-x)}$关于乘积测度$P_F\times L[-T,T]$绝对可积，由富比尼定理知可交换上式中积分次序，得

$$I=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}dF(y)\left(\int_{-T}^{T}e^{it(y-x)}dt\right)。$$

记$g(T,y)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{it(y-x)}dt$，则当$y=x$时有

$$g(T,y)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt=1，$$

当$y\neq x$时有 $g(T,y)=\frac{1}{2T}\int_{0}^{T}2\cos t(y-x)dt=\frac{\sin T(y-x)}{T(y-x)}$。

由此得$|g(T,y)|\le 1$，且$\lim_{T\to\infty}g(T,y)=\begin{cases}0, & y\neq x\\ 1, & y=x\end{cases}$。由控制收敛定理得

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{T\to\infty}g(T,y)\right)dF(y)=\int_{\{x\}}dF(y)=P\{x\}=F(x+0)-F(x)。$$

32、证：由$\eta=\xi+b$得$f_\eta(t)=e^{itb}f_\xi(t)$，亦有$\log f_\eta(t)=itb+\log f_\xi(t)$。

当$k>1$时，等式两边同对t求k阶导数，itb一项导数为 0 所以由定义得η的X_k等于ξ的X_k。

33、解：利用特征函数$f(t)$的原点矩m_k之间的关系式$f^{(k)}(0)=i^k m_k$，可把$f(t)$展成幂级数

$$f(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k}{k!}(it)^k,\qquad f(0)=1 \tag{1}$$

又利用上题中定义的X_k，可把$\log f(t)$展成幂级数$\log f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{k!}(it)^k$

$$\therefore f(t)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{k!}(it)^k\right\}。\tag{2}$$

再把（2）中的e^y展成幂级数得

$$f(t)=1+\frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{k!}(it)^k+\frac{1}{2!}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{k!}(it)^k\right]^2+\cdots。\tag{3}$$

比较（1）与（3）式中的系数，可得半不变量与原点矩之间的关系式

34、解：由诸ξ_1独立得ξ的密度函数为

$$p(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p_{\xi_i}(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sigma^n}\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

数学期望和协方差阵为

$$E\xi=\begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}_{n=1},\qquad B=\begin{pmatrix}\sigma^2 & & & 0\\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma^2\end{pmatrix}_{n=n}。$$

由上题知，

$$\bar{\xi}\sim N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a,\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\right)=N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right),$$

所以$\bar{\xi}$ 的分布密度为 $p_{\bar{\xi}}(x)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\dfrac{n(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$。

35、**解**：取 $E\eta=0, D\eta=C,\eta\sim N(0,C), C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$。令$\xi=A\eta$，其中 $A=(a_{ij})_{2\times 2}$，则η与ξ的特征函数分别为

$$f_\eta(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}t^\tau Ct\right\},f_\xi(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}t^\tau(ACA)t\right\},$$

且有 $ACA^\tau=\Sigma$，即

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}^2+a_{12}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}\\ a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} & a_{21}^2+a_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}。$$

矩阵A不唯一，取$a_{11}=\sqrt{2}$ 可解得 $a_{12}=\sqrt{2},a_{21}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},a_{22}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}&\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，这时满足题中的要求，由$\eta\sim N(0,C)$ 得η非退化，且η的密度函数为 $p(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2\pi}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\right\}$。

36、**证**：设$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^\tau$，$\xi_i$独立同方差，其协方差矩阵和特征函数分别为

$$D\xi=\begin{pmatrix}\sigma^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2\end{pmatrix}=B,\qquad f_\xi(t)=\exp\left\{ia^\tau t-\frac{1}{2}t^\tau Bt\right\}。$$

再设$\eta = C\xi$，其中$C=\begin{pmatrix} c_{11}\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\cdots c_{nn}\end{pmatrix}$是正交矩阵，即满足

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} c_{ji}c_{ki} = 0 \ (j \neq k)。$$

由此得$\eta \sim N(Ca, CBC^{\tau})$，其特征函数为$f_\eta(t) = \exp\left\{ i(Ca)^{\tau} t - \frac{1}{2} t^{\tau}(CBC)t \right\}$，即$\eta$的协方差矩阵为

CBC^{τ}，利用 C 的正交性计算得

$$CBC^{\tau} = \begin{pmatrix} c_{11}\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\cdots c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11}\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\cdots c_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 c_{11}\cdots \sigma^2 c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma^2 c_{n1}\cdots \sigma^2 c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11}\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\cdots c_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma c_{11}^2\sigma^2 & \Sigma c_{11}c_{21}\sigma^2 & \cdots\Sigma c_{11}c_{n1}\sigma^2 \\ \Sigma c_{21}c_{11}\sigma^2 & \Sigma c_{21}^2\sigma^2 & \cdots\Sigma c_{21}c_{n1}\sigma^2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \Sigma c_{n1}c_{11}\sigma^2 & \Sigma c_{n1}c_{21}\sigma^2 & \cdots\Sigma c_{n1}^2\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2\end{pmatrix} = B$$

矩阵中Σ都是对i从 1 到求和的。由协方差矩阵知，η的各分量$\eta_1,\cdots,\eta_n$间两两不相关且同方差，再由正态分布间相互独立的充要条件是它们两两不相关得，$\eta_1,\cdots,\eta_n$相互独立且同方差。

37、解：(1) $\because P_\xi(\xi = k_1) = \sum_{k_2=0}^{n-k_1} P(\xi = k_1, \eta = k_2)$

$\therefore \xi$ 的边际分布是：$P_\xi(\xi = k_1) = \dfrac{n!}{k_1!(n-k_1)!} P_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1} \quad k_1 = 0,1,2,\cdots,n$

(2) 同理 $P_\eta(\eta = k_2) = \dfrac{n!}{k_2!(n-k_2)!} P_2^{k_2}(1-P_c)^{n-k_2} \quad k_2 = 0,1,2,\cdots,n$

$\therefore \xi = k_1$给定的η条件密度

$$P_{\eta|\xi} = \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\left(\frac{P_2}{1-P_1}\right)^{k_2}\left(1-\frac{P_2}{1-P_1}\right)^{n-k_1-k_2} \qquad k_2 = 0,1,2,\cdots,n\text{-k}_1$$

$$\therefore E(\eta|\xi) = (n-\xi)\frac{P_2}{1-P_1}$$

38、解：由ξ 的取值特征有：$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{AB^n}{n!} = 1$，又$\because E\xi = 8 \quad \therefore \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\dfrac{AB^k}{k!} = 8$

联立解得 $B=8 \quad A=e^{8}$

39、.解: $\because \xi,\eta$ 独立 $\therefore DU=D\xi+4D\eta=1+16=17, DV=D\eta+4D\xi=8$

$$\operatorname{cov}(U,V)=E(u-EU)(V-EV)=10 \qquad \therefore \rho_{uv}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}$$

$$\therefore \rho_{uv}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

40、解：设旅客等车的时间为 ξ，它是随机变量 $\therefore p(\xi<t)=1-e^{-8t}$

故 ξ 服从参数是 8 的指数分布，即 ξ 的密度为 $P(x)=\begin{cases}8e^{-8t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$

$\therefore$ 平均等车时间为 $E_\xi=\dfrac{1}{8}$

41、解： 设园盘直径为 ξ 　则 $\xi\sim V(a,b)$ $\therefore$ 园盘面积 $s=\pi\cdot(\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{\pi}{4}\xi^2$

由于 $E\xi=\dfrac{b+a}{2}, D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$\therefore ES=\frac{\pi}{4}E\xi^2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(b+a)^2}{4}\right)=\frac{\pi}{12}(a^2+b^2+ab)$$

42、解：设 ξ 为所需时间，则 $F_\xi(t)=1-e^{-\lambda t},(t>0)$，于是 ξ 的密度函数 $P_\xi(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，

所以 $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}tP_\xi(t)dt=\dfrac{1}{\lambda}$， 所以发现沉船所需的平均搜索时间为 $\dfrac{1}{\lambda}$

43、解:1)

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4	0	0	0	$\frac{1}{4}$

2) $E\eta = 1\times\frac{1}{16}+2(\frac{1}{16}+\frac{1}{12})+3(\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8})+4(\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}) = 3.25$

44、解： $Cov(\xi+\eta,\eta+\zeta) = E(\xi+\eta)(\eta+\zeta) - E(\xi+\eta)E(\eta+\zeta)$

ξ,η,ζ 互不相关 $E\eta^2-(E\eta)^2 = D\eta = 3$

$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta = 4, D(\eta+\zeta) = D\eta + D\zeta = 9$$

故 $\rho_{uv} = \frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{9}} = \frac{1}{2}$

45、解： 1)

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

2） $E\xi = 0\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)+1\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)+3\cdot\frac{1}{27} = 1$

46、解： $\mathrm{cov}(\xi-2\eta,2\xi-\eta) = E(\xi-2\eta)(2\xi-\eta) - E(\xi-2\eta)E(2\xi-\eta)$ （ξ,η 独立）

$$= 2E\xi^2 + 2E\eta^2 - 10$$

$$= 2[D\xi+(E\xi)^2] + 2[D\eta+(E\eta)^2] - 10 = 10$$

$D(\xi-2\eta) = D\xi + 4D\eta = 17$， $D(2\xi-\eta) = 4D\xi + D\eta = 8$

故 $\rho_{uv} = \frac{10}{\sqrt{17}\sqrt{8}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

47、解：设ξ_i表示送客汽车在i站是否停车，则其分布为

ξ_i	0	1
p	$\left(\frac{9}{20}\right)^{20}$	$1-\left(\frac{9}{20}\right)^{20}$

故总停车次数为$\sum_{i=1}^{10}\xi_i$

$$\therefore E(\sum_{i=1}^{10}\xi\ )=10[1-(\frac{9}{20})^{20}]\approx 8.787$$

48、解：设ξ_i 为公司从一个参加者身上获得利益则ξ_i 为一个r,v分布列为

ξ_i	a	$a-b$
p	p	$1-p$

$\therefore E\xi_i=ap+(a-b)(1-p)=a-b(1-p)$

公司期望获益有$E\xi_i>0$

$\therefore a<b<\dfrac{a}{1-p}$对$m$个人公司获益为$E(\sum_{i=1}^{m}\xi_i)=\sum_{i=1}^{m}E\xi_i=ma-mb(1-p)$

49、解：设第i次轰炸命中目标的次数为$\xi_i(i=1,2,\cdots,100)$ 则 100 次轰炸命中目标的次数

为 $\xi=\sum_{i=1}^{100}\xi_i$ $E\xi=100\times 2=200$ $D\xi=100\times 1.69=169$

$$\therefore P(180<\xi<220)=P(-\frac{20}{13}<\frac{\xi-200}{13}<\frac{20}{13})=2\Phi(1.54)-1\approx 0.8744$$

50、解：设$A_i=\{$第i次打开门$\}$，$i=1,2,\cdots,n$。X的可能的取值为$1,2,\cdots,n$。

$$P\{X+1\}=P(A_1)=\frac{1}{n},$$

$$P\{X+2\}=P(\bar{A}_1,A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

依次下去，有

$$P\{X+n\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}A_n)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1})=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{n}$$

因此，X的分布列为

X	1	2	3	$\cdots$	n
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

故

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\frac{1}{n}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}\text{。}$$

51、解：设球的直径为X，其概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，球的体积$Y=\dfrac{\pi}{6}X^3$，它的期望为

$$E(Y)=\int_a^b\frac{\pi}{6}x^3\frac{1}{b-a}dx=\frac{\pi}{24}\frac{b^4-a^4}{b-a}=\frac{\pi}{24}(b+a)(b^2+a^2)=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2)$$

52、解：$E(X)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p=p\sum\limits_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}=\dfrac{p}{(1-q)^2}=\dfrac{p}{p^2}=\dfrac{1}{p}$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}p=p\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}=p\frac{1+q}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

53、解：$Y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}X\right)$的可能值为：

$$\sin\left(\frac{i\pi}{2}\right)=\begin{cases}-1, & i=4n-1\\ 0, & i=2n\\ 1, & i=4n-3\end{cases},\quad n=1,2,\cdots;$$

$$P\{Y=-1\}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots=\frac{1}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{2}{15};$$

$$P\{Y=0\}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3};$$

$$P\{Y=1\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}$$

故 $E(Y)=(-1)\cdot P\{X=-1\}+0\cdot P\{X+0\}+1\cdot P\{Y=1\}=P\{Y+1\}-P\{Y=-1\}=\frac{8}{15}-\frac{2}{15}=\frac{2}{5}$.

54、解：X 的可能值为 1，2，3，4。$\{X=1\}=\{X\ge 1\}-\{X\ge 2\}$，$\{X=2\}=\{X\ge 2\}-\{X\ge 3\}$，$\{X=3\}=\{X\ge 3\}-\{X\ge 4\}$。又因 $P\{X\ge 2\}=\frac{3^3}{4^3}$, $P\{X\ge 1\}=1$, $P\{X\ge 3\}=\frac{2^3}{4^3}$，$P\{X\ge 4\}=\frac{1}{4^3}$，$P\{X=4\}=\frac{1}{4^3}$。

故 $P\{X=1\}=1-\frac{3^3}{4^3}=\frac{37}{64}$，$P\{X=2\}=\frac{3^3}{4^3}-\frac{2^3}{4^3}=\frac{19}{64}$，$P\{X=3\}=\frac{2^3}{4^3}-\frac{1}{4^3}=\frac{7}{64}$，

$P\{X=4\}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$。故知 $E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$。

55、解：设 X_i 为第 i 个骰子出现的点数 $X_i(i=1,2,3,4,5,6)$，它们相互独立。X 为 6 个骰子出现的点数之和，即 $X=\sum_{i=1}^{k}X_i$。则

$$E(X_i)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}$$

$$E(X_i)=\left(1-\frac{21}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(2-\frac{21}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}+\cdots+\left(6-\frac{21}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{35}{12}$$

故 $E(X)=21,\ D(X)=6\times\frac{35}{12}=\frac{35}{2}$。

由切比雪夫不等式 $P\{15<X<27\}=P\{|X-2|<6\}\ge\frac{1-\frac{35}{2}}{6^2}=1-\frac{35}{72}\approx 0.514$

56、解：设每毫升正常男性成人血液中含白细胞数为 X，由题设知 $E(X)=7300,\quad D(X)=700^2$。由

切比雪夫不等式

$$P\{5200<X<9400\}=P\{-2100<X<-7300<2100\}$$

$$=P\{|X-7300|<2100\}\geq 1-\frac{700^2}{2100^2}=\frac{8}{9}$$

57、解：设第 i 第部分长度为 $X_i(i=1,2,\cdots,10)$。$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 相互独立且服从同一分布。

$$E(X_i)=2,\ D(X_i)=(0.05)^2,$$

故由中心极限定理，产品合格的概率为

$$P\left\{20-0.1<\sum_{i=1}^{10}X_i<20+0.1\right\}\approx\Phi\left(\frac{0.1}{0.05\sqrt{10}}\right)-\Phi\left(\frac{-0.1}{0.05\sqrt{10}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)-\Phi\left(\frac{-\sqrt{10}}{5}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)-1=2\Phi(0.63)-1=0.4714$$

58、解：设第 i 只元件的寿命为 $X_i(i=1,2,\cdots,16)$，则 X_i 独立且服从指数分布，且

$$E(X_i)=100,\quad D(X_i)=100^2$$

故 $P\left\{\sum_{i=1}^{16}X_i>1920\right\}\approx 1-\Phi\left(\frac{1920-16\times100}{\sqrt{16\times100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{1920-1600}{400}\right)=1-\Phi(0.8)=0.2119$

59、证明：令 $g(t)=E(t\xi-\eta)^2$，对于一切 t；　$\because(\xi t-y)^2\geq0$ 所以 $E(t\xi-\eta)^2\geq0$，

故 $g(t)=0$ 即：$t^2E\xi^2-2tE\xi\eta+E\xi^2=0$

至多只有一个实根　$\therefore\Delta=(E\xi\eta)^2-E\xi^2\cdot E\eta^2\leq0$

从而 $(E\xi\eta)^2\leq E\xi^2\cdot E\eta^2$　　　证毕

60、证：设 ξ 的分布函数为 $F(x)$，因为：$E|\xi|^r$ 存在 $(r>0)$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r df(x)<+\infty$$

故 $P(|\xi|\geq\varepsilon)=\int_{|x|\geq\varepsilon}1\cdot dF(x)\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}dF(x)=\frac{1}{\varepsilon^r}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r dF(x)=\frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$

61、证：　$\because E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(\xi=k)$

$$\therefore E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p(\sum_{k=0}^{\infty}q^k)'=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

62、证： 设(ξ,η)的分布列: $p(\xi=x_i,y=y_j)=p_{ij}\quad \begin{matrix} i=1,2\\ j=1,2\end{matrix}$

$\therefore E\xi=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})$ $\qquad E\eta=y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})$

由于ξ,η不相关 $\therefore \operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$ 即得

$$p_{ij}=(p_{i1}+p_{i2})(p_{j1}+p_{j2})\quad \begin{matrix} i=1,2\\ j=1,2\end{matrix}$$

即 $p(\xi=x_i,y=x_j)=p(\xi=x_i)\cdot p(\eta=x_j)$，故$(\xi,\eta)$独立。

63、证： 切比雪夫大数定律是： 若$\{\xi_n\}$是两两互不相关的随机变量序列，且存在常数c，使

$D\xi_i\le c\qquad i=1,2,\cdots$，则$\forall\varepsilon>0\qquad \lim\limits_{n\to\infty}p(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|\ge\varepsilon)=0$

证明：由切比雪夫不等式知： $p(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|\ge\varepsilon)\le\frac{D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{n^2\varepsilon^2}\le\frac{c}{n\varepsilon^2}$

(用到了$\xi_1\cdots\xi_n\cdots$ 互不相关性)

$\because c$是常数 $\therefore n\to\infty\ \frac{c}{n\varepsilon^2}\to0\ \therefore\lim\limits_{n\to\infty}p(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|\ge\varepsilon)=0$ 证毕

64、证： 设ξ的分布列: $P(\xi=i)=p_i\quad i=0,1,2,\cdots\quad \therefore E\xi=\sum_{i=0}^{\infty}ip_i=\sum_{i=1}^{\infty}ip_i$

而$\sum_{i=1}^{\infty}p(\xi\ge i)=p_1+2p_2+3p_3+\cdots+np_n+\cdots$

$$\therefore E\xi=\sum_{i=1}^{\infty}p(\xi\ge i)$$

65、证： $E[\max(\xi,\eta)]=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x,y)e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dxdy$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-R^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x dx\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-R^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{1-R}{1+R}\right]x^2}dx$$

$$=\sqrt{\frac{1-R}{\pi}}$$

66、证：设 $F(x)$ 是 ξ 的分布函数，$a\le\int adF(x)\le\int_a^b xdF(x)=E\xi=\int_a^b xdF(x)\le\int_a^b bdF(x)=b$

即：$a\le E\xi\le b$ $\quad D(\xi)=\int_a^b (x-E\xi)^2dF(x)\le\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dF(x)$

67、证：$E(\xi-c)^2=E[\xi-E\xi+E\xi-c]^2=E(\xi-E\xi)^2+(E\xi-c)^2=D\xi+(E\xi-c)^2\ge D\xi$

68、证：因 $E\xi=n+1, D\xi=n+1$

故 $P\{0<\xi<2(n+1)\}=P\{|\xi-E\xi|<n+1\}\ge1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}$

69、证：因 $E(\sum_{i=1}^k\xi_i)=k, D(\sum_{i=1}^k\xi_i)=k$，

故 $P\left\{0<\sum_{i=1}^k\xi_i<2k\right\}=P\left\{|\sum_{i=1}^k\xi_i-k|<k\right\}\ge1-\frac{k}{k^2}=\frac{k-1}{k}$

70、证：取 $a_n=E\left(\frac{\sum_{i=1}^n\xi_i}{n}\right)=\frac{E\left(\sum_{i=1}^n\xi_i\right)}{n}\qquad n=1,2,\cdots$

则 $0\le P\{|\frac{\sum_{i=1}^n\xi_i}{n}-a_n|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(\frac{\sum_{i=1}^n\xi_i}{n})}{\varepsilon^2}=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}D(\sum_{i=1}^n\xi_i)\to0$

即 $P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-a_n\right|<\varepsilon\right\}\to 1$ 故$\{\xi_n\}$服从大数定律

71、证：先求边际分布。 $P_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},|x|\le 1\\ 0,\quad 其它\end{cases}$

类似 $P_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},|y|\le 1\\ 0,\quad 其它\end{cases}$

再求 $Cov(\xi,\eta)$。 由于$P_\xi(x),P_\eta(y)$均为偶函数 $\therefore E\xi=E\eta=0$

$E\xi\eta=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$ $\therefore Cov(\xi,\eta)=0\Rightarrow\xi$ 与 η 不相关

最后，由于$P(x,y)\ne P_\xi(x)P_\eta(y)$ $\therefore\xi$与η不相互独立

72、证：$E\xi=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx=(m+1)\int_0^{\infty}\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}e^{-x}dx=m+1$

$$E\xi^2=\int_0^{\infty}x^2\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx=(m+2)(m+1)\int_0^{\infty}\frac{x^{m+2}}{(m+2)!}e^{-x}dx=(m+2)(m+1)$$

$$\therefore D\xi^2=E\xi^2-(E\xi)^2=(m+2)(m+1)-(m+1)^2=m+1$$

$$\therefore P(0<\xi<2(m+1))=P(-(m+1)<\xi-(m+1)<m+1$$

$$=P((\xi-E\xi(<(m+1)\ge 1-\frac{D\xi}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1}$$

73、证：$E(X_i)=-ni\frac{1}{2i^2}+0\left(1-\frac{1}{i^2}\right)+ni\frac{1}{2i^2}=0$，

$E(X_i^2)=i^2a^2\frac{1}{2i^2}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+i^2a^2\frac{1}{2i^2}=a^2$

故 $D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=a^2$。从而

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0,\quad D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{a^2}{n}$$

由切比雪夫不等式

$$p\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}=\frac{a^2}{n\varepsilon^2}\to 0,\quad n\to\infty$$

74、证：设 $f(x)$ 是 ξ 的密度函数，则 $f(-x)=f(x)$。由 $xf(x)$ 是奇函数可得 $E\xi=0$，从而 $E\xi E|\xi|=0$。又由于 $x|x|f(x)$ 是奇函数，得

$$E\xi|\xi|=\int_{-\infty}^{\infty}x|x|f(x)dx=0=E\xi E|\xi|$$

故 $|\xi|$ 与 ξ 不相关。

由于 ξ 的密度函数是偶函数，故可选 $c>0$ 使 $0<P\{|\xi|<c\}<1$，亦有 $P\{\xi<c\}<1$，

$$\therefore P\{\xi<c\}P\{|\xi|<c\}\neq P\{|\xi|<c\}=P\{\xi<c,|\xi|<c\}$$

其中等式成立是由于 $\{|\xi|<c\}\subset\{\xi<c\}$。由此得 $|\xi|$ 与 ξ 不独立。

75、证：$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=0$，同理 $E\eta=0$。

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}ydy=0$$

即 ξ 与 η 不相关。但 ξ 与 η 不独立，事实上可求得

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases},\quad p_\eta(x)=\begin{cases}\frac{2}{y}\sqrt{1-y^2}, & |y|\leq 1\\ 0, & |y|>1\end{cases},$$

而当 $|x|\leq 1$ 且 $|y|\leq 1$ 时，$p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$。

76、证：设 $\begin{pmatrix}a, & b\\ p_1, & q_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c, & d\\ p_2, & q_2\end{pmatrix}$。作两个随机变量

$$\xi^*=\xi-b:\begin{pmatrix}a-b, & 0\\ p_1, & q_1\end{pmatrix},\eta^*=\eta-d:\begin{pmatrix}c-d, & 0\\ p_2, & q_2\end{pmatrix}。$$

由 ξ 与 η 不相关即 $E\xi\eta=E\xi E\eta$ 得

$$E\xi^*\eta^*=E(\xi\eta-b\eta-d\xi+bd)=(E\xi E\eta-bE\eta-dE\xi+bd)$$

$$=(E\xi-b)(E\eta-d)=E\xi^*E\eta^*,$$

而 $E\xi^*\eta^*=(a-b)(c-d)P\{\xi^*=a-b,\eta^*=c-d\}$,

$E\xi^*E\eta^*=(a-b)P\{\xi^*=a-b\}\ (c-d)P\{\eta^*=c-d\}$,

由上两式值相等，再由 $(a-b)(c-d)\neq 0$ 得

$$P\{\xi^*=a-b,\eta^*=c-d\}=P\{\xi^*=a-b\}P\{\eta^*=c-d\}$$

此即 $P\{\xi=a,\eta=c\}=P\{\xi=a\}\ P\{\eta=c\}$。同理可证

$P\{\xi=a,\eta=d\}=P\{\xi=a\}\ P\{\eta=d\}$，$P\{\xi=b,\eta=c\}=P\{\xi=b\}\ P\{\eta=c\}$

$P\{\xi=b,\eta=d\}=P\{\xi=b\}\ P\{\eta=d\}$,

从而 ξ 与 η 独立。

77、证：$EU=aEX+b,DU=a^2DX$，$EV=cEY+d,DV=c^2DY$,

$$\operatorname{cov}(U,V)=Ea(X-EX)c(Y-EY)=ac\cdot\operatorname{cov}(X,Y),$$

$$r_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{|a|\sqrt{DX}\,|c|\sqrt{D(Y)}}=\frac{ac}{|ac|}r_{xy}。$$

欲 $r_{UV}=r_{xy}$，题中需补设 a 与 c 同号。

78、证：$E\xi^p=\int_A^\infty rA^r x^p\frac{1}{x^{r+1}}dx=\int_A^\infty rA^r\frac{1}{x^{r-p+1}}dx$。当且仅当 $r-p+1>1$，即 $p<r$ 时上式积分收敛，$E\xi^p$ 存在。当时，

$$E\xi^p=\frac{r}{r-p}A^r\left(-\frac{1}{x^{r-p}}\right)\Bigg|_A^\infty=\frac{r}{r-p}A^p。$$

79、证：对 $a>0$，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{(\log x)^2}=\infty$，所以存在 $M>e$，使当 $x>M$ 时，$\frac{x}{(\log x)^2}>1$ 此时

$$E|\xi|^a=2\int_0^\infty\frac{x^a}{2x(\log x)^2}dx=\int_0^\infty\frac{1}{x}\cdot\frac{x^a}{2x(\log x)^2}dx\geq\int_M^\infty\frac{1}{x}dx=\infty,$$

$\therefore\ E|\xi|^a=\infty$。

80、证：$a_{k-1}t^2+2a_kt+a_{k+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(t^2|x|^{k-1}+2t|x|^t+|x|^{k+1}\right)dF(x)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(t|x|^{\frac{1}{2}(k-1)}+|x|^{\frac{1}{2}(k+1)}\right)^2 dF(x)\ge 0$$

即 $u(t)=a_{k-1}t^2+a_{k+1}\ge 0$ 对任意 t 成立。又 $a_{k-1}>0$，所以判别式 $=4a_k^2-4a_{k-1}a_{k+1}\le 0$，即 $a_k^2\le a_{k-1}a_{k+1}$，从而有 $a_k^{2k}\le a_{k-1}^k a_{k+1}^k$。依次令 $k=1,2,\cdots,n-1$ 得

$$a_1^2\le a_0a_2,\ a_2^4\le a_1^2a_3^2,\cdots,a_{n-11}^{2(n-1)}\le a_{n-2}^{n-1}a_n^{n-1}$$

其中 $a_0=1$。把这些不等式中前 k 个的左右两边分别相乘化简得 $a_k^{k+1}\le a_{k+1}^k$，两边同开 $k(k+1)$ 次方，即得 $\sqrt[k]{a_k}\le\sqrt[k+1]{a_{k+1}}$。

81、证：（1）设 $\xi_1\sim b(k;n,p),\ \xi_2\sim b(k;m,p)$，则它们的母函数分别为 $P_1(s)=(ps+q)^n$，$P_2(s)=(ps+q)^m$。再设 ξ_1 与 ξ_2 独立，$\eta=\xi_1+\xi_2$，则 η 的母函数为

$$P_\eta(s)=P_1(s)\cdot P_2(s)=(ps+q)^n(ps+q)^m=(ps+q)^{n+m}$$

二项分布 $b(k;n+m,p)$ 的母函数为 $(ps+q)^{n+m}$，由于母函数与分布列之间是相互唯一确定的，由此即得 η 服从 $b(k;n+m,p)$，即二项分布具有再生性。

（2）设 ξ_1,ξ_2 分别服从参数为 λ_1,λ_2 的普阿松分布，其母函数分别为 $P_1(s)=\exp\{\lambda_1(s-1)\},P_2(s)=\exp\{\lambda_2(s-1)\}$。再设 ξ_1 与 ξ_2 独立，$\eta=\xi_1+\xi_2$，则 η 的母函数为 $P_\eta(s)=P_1(s)P_2(s)=\exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)\}$。

所以 η 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的普阿松分布，普阿松分布具有再生性。

82、证：必要性。由 $F(x)=1-F(-x+0)$ 得 $P\{\xi<x\}=P\{\xi>-x\}=P\{-\xi<x\}$，此即 $F_\xi(x)=F_{-\xi}(x)$，所以对特征函数 $f(t)$ 有

$$f(t)=Ee^{it\xi}=\int e^{itx}dF_\xi(x)=\int e^{itx}dF_{-\xi}(x)=Ee^{-it\xi}=\overline{f(t)},$$

由此知 $f(t)$ 是实函数。又有

$$f(-t)=\int e^{-itx}dF_\xi(x)=\int e^{-itx}dF_{-\xi}(x)=Ee^{-it(-\xi)}=Ee^{it\xi}=f(t),$$

所以 $f(t)$ 又是偶函数。

充分性。由于 $\overline{f_\xi(-t)} = Ee^{-it\xi} = Ee^{it(-\xi)} = f_{-\xi}(t)$，又由题设知 $f_\xi(t)$ 是实函数，所以 $f_\xi(t) = \overline{f_\xi(t)} = f_{-\xi}(t)$。由唯一性定理知，$\xi$ 与 $-\xi$ 的分布函数相同，$F_\xi(x) = F_{-\xi}(x)$，即 $P\{\xi < x\} = P\{-\xi < x\} = P\{\xi > -x\}$，从而 $F(x) = 1 - F(-x+0)$。

83、证：由上题得 $f_\xi(t) = f_\eta(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$，所以由 $\xi + \eta = 2\xi$ 得

$$f_{\xi+\eta}(t) = f_{2\xi}(t) = \mathrm{e}^{-|2t|} = \mathrm{e}^{-2|t|} = f_\xi(t) \cdot f_\eta(t)。$$

但 ξ 与 η 并不独立，事实上，可取 c 使 $0 < P\{\xi < c\} < 1$，则

$$P\{\xi < c, \eta < c\} = P\{\xi < c\} \neq P\{\xi < c\} \cdot P\{\eta < c\},$$

这说明由 ξ 与 η 独立可推得 $f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t) \cdot f_\eta(t)$，但反之不真。

84、证：记 ξ_i^2 的分布函数为 $F(y)$，则当 $y \le 0$ 时 $F(y) = 0$；当 $y > 0$ 时

$$F(y) = P\left\{-\sqrt{y} < \xi_i < \sqrt{y}\right\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

利用对参变量积分求导法则，对 $F(y)$ 求导可得 ξ_i^2 的分布密度 $p(y)$ 当 $y \le 0$ 时 $p(y) = 0$；当 $y > 0$ 时

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}。$$

把此式与 X^2-分布密度比较可知，ξ_i^2 服从自由度为 1 的 X^2-分布，也就是服从 $\Gamma-$分布 $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。由 ξ_i 间独立得 ξ_i^2 间也独立，利用上题结论可得 $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ 服从 $\Gamma-$分布 $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right)$，即自由度为 n 的 X^2-分布。再由上题中 $\Gamma-$分布具有再生性可得，这里 X^2-分布也具有再生性。

85、证：$f(t)$ 是实值函数，复数部分为 0，只需对实部计算。

$$1 - f(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 2tx) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\sin^2 tx dF(x)$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx)(1 + \cos tx) dF(x) \le 4\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF(x) = 4(1 - f(t))。$$

$$1 + f(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \cos 2tx) dF(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} 2\cos^2 tx dF(x)$$

$$\geq 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx dF(x)\right)^2=2(f(t))^2,$$

其中利用柯西——许瓦兹不等式（置$\varphi(x)=\cos tx,\psi(x)=1$）

$$\left[\int\varphi(x)\psi(x)dF(x)\right]^2\leq\left(\int\varphi^2(x)dF(x)\right)\left(\int\psi^2(x)dF(x)\right)。$$

86、证：由$\eta=\xi+b$得$f_\eta(t)=e^{itb}f_\xi(t)$，亦有$\log f_\eta(t)=itb+\log f_\xi(t)$。当$k>1$时，等式两边同对$t$求$k$阶导数，$itb$一项导数为 0 所以由定义得$\eta$的$X_k$等于$\xi$的$X_k$。

87、证：当$x>0$时有

$$\int_x^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\leq\int_x^{\infty}\frac{t}{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{1}{x}\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)\Big|_x^{\infty}=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\int_x^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\geq\int_x^{\infty}\frac{t^4+2t^2-1}{t^4+2t^2+1}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\int_x^{\infty}d\left(-\frac{t}{1+t^2}e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)=\frac{-t}{1+t^2}e^{-\frac{1}{2}t^2}\Big|_x^{\infty}=\frac{x}{1+x^2}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

所以不等式成立。

88、证：因为$\xi_k,\xi_1(|k-l|\geq 2)$是独立的，所以

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^n\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{k=1}^n(\xi_k-E\xi_k)\right]^2=\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{k=1}^n(\xi_k-E\xi_k)^2+2\sum_{k=1}^{n-1}(\xi_k-E\xi_k)(\xi_{k+1}-E\xi_{k+1})\right]$$

$$=\frac{n}{n^2}D\xi_k+\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}r_{k,k+1}\sigma^2\leq\frac{\sigma^2}{n}+\frac{2}{n}\sigma^2=\frac{3}{n}\sigma^2\to 0\ \ (n\to\infty)$$

第五章 有 限 定 理

1、设 $f(x)(0<x<-\infty)$ 是单调非降函数，且 $f(x)>0$，对随机变量 ξ，若 $Ef(|\xi|)<\infty$，则对任意 $x>o$，$P\{|\xi|\geq x\}=\dfrac{1}{f(x)}Ef(|\xi|)$。

2、ξ 为非负随机变量，若 $Ee^{a\xi}<\infty(a>0)$，则对任意 $x>o$，$P\{\xi\geq x\}\leq e^{-ax}Ee^{a\xi}$。

3、若 $h(x)\geq 0$，ξ 为随机变量，且 $Eh(\xi)<\infty$，则关于任何 $c>0$，

$$P\{h(\xi)\geq c\}\leq c^{-1}Eh(\xi)。$$

4、$\{\xi_k\}$ 各以 $\dfrac{1}{2}$ 概率取值 k^s 和 $-k^s$，当 s 为何值时，大数定律可用于随机变量序列 $\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$ 的算术平均值？

5、验证概率分布如下给定的独立随机变量序列是否满足马尔可夫条件：

（1）$P\{X_k=\pm 2^k\}=\dfrac{1}{2}$；

（2）$P\{X_k=\pm 2^k\}=2^{-(2k+1)}$，$P\{X_k=0\}=1-2^{-2k}$；

（3）$P\{X_k=\pm 2^k\}=\dfrac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}$，$P\{X_k=0\}=1-k^{-\frac{1}{2}}$。

6、若 ξ_k 具有有限方差，服从同一分布，但各 k 间，ξ_k 和 ξ_{k+1} 有相关，而 $\xi_k,\xi_1(|k-l|\geq 2)$ 是独立的，证明这时对 $\{\xi_k\}$ 大数定律成立。

7、已知随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 的方差有界，$D\xi_n\leq c$，并且当 $|i-j|\to\infty$ 时，相关系数 $r_{ij}\to 0$，证明对 $\{\xi_k\}$ 成立大数定律。

8、对随机变量序列 $\{\xi_i\}$，若记 $\eta_n=\dfrac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n)$，$a_n=\dfrac{1}{n}(E\xi_1+\cdots+E\xi_n)$，则 $\{\xi_i\}$ 服从大数定律的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}E\left\{\dfrac{(\eta_n-a_n)^2}{1+(\eta_n-a_n)^2}\right\}=0$。

9、用斯特灵公式证明：当 $n\to\infty,m\to\infty,n-m\to\infty$，而 $\dfrac{m}{n}\to 0$ 时，

$$\binom{2n}{n-m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}e^{-\frac{m^2}{n}}。$$

10、某计算机系统有 120 个终端，每个终端有 5%时间在使用，若各个终端使用与否是相互独立的，试求有 10 个或更多终端在使用的概率。

11、求证，在 $x>o$ 时有不等式 $\frac{x}{1+x^2}e^{-\frac{1}{2x^2}} \le \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \le \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 。

12、用德莫哇佛——拉普拉斯定理证明：在贝努里试验中，$0<p<1$，则不管 k 是如何大的常数，总有 $P\{|\mu_n-np|<k\}\to 0\ \ (n\to\infty)$。

13、用车贝晓夫不等式确定当掷一均匀铜币时，需投多少次，才能保证使得正面出现的频率在 0.4 至 0.6 之间的概率不小于 90%。并用正态逼近计算同一问题。

14、用车贝晓夫不等式及德莫哇佛——拉普拉斯定理估计下面概率：$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\ge\varepsilon\right\}$ 并进行比较。这里 μ_n 是 n 次贝努里试验中成功总次数，p 为每次成功的概率。

15、现有一大批种子，其中良种占 $\frac{1}{6}$，今在其中任选 6000 粒，试问在这些种子中，良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 之差小于 1%的概率是多少？

16、种子中良种占 $\frac{1}{6}$，我们有 99%的把握断定，在 6000 粒种子中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 之差是多少？这时相应的良种数落在哪个范围内？

17、蒲丰试验中掷铜币 4040 次，出正面 2048 次，试计算当重复蒲丰试验时，正面出现的频率与概率之差的偏离程度，不大于蒲丰试验中所发生的偏差的概率。

18、设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于连续的分布函数 $F(x)$，试证这收敛对 $x\in R^1$ 是一致的。

19、试证若正态随机变量序列依概率收敛，则其数学期望及方差出收敛。

20、若 X_n 的概率分布为 $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$，试证相应的分布函数收敛，但矩不收敛。

21、随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 具有分布函数 $\{F_n(x)\}$，且 $F_n(x)\to F(x)$，又 $\{\eta_n\}$ 依概率收敛于常数 $c>0$。试证：（I）$\zeta_n=\xi_n+\eta_n$ 的分布函数收敛于 $F(x-c)$；（II）$\zeta_n=\frac{\xi_n}{\eta_n}$ 的分布函数收敛于 $F(cx)$。

22、试证：（1）$X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n-X\xrightarrow{P}0$；

（2）$X_n\xrightarrow{P}X, X_n\xrightarrow{P}Y\Rightarrow P\{X=Y\}=1$；

（3）$X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n-X_m\xrightarrow{P}0\ \ (n,m\to\infty)$；

（4）$X_n\xrightarrow{P}X, X_n\xrightarrow{P}Y\Rightarrow X_n\pm Y_n\xrightarrow{P}X\pm Y$；

（5）$X_n \xrightarrow{P} X, k$是常数$kX_n \xrightarrow{P} kX$；

（6）$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n^2 \xrightarrow{P} X^2$；

（7）$X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b,\ \ a,b$常数$X_nY_n \xrightarrow{P} ab$；

（8）$X_n \xrightarrow{P} 1 \Rightarrow X_n^{-1} \xrightarrow{P} 1$；

（9）$X_n \xrightarrow{P} a,\ Y_n \xrightarrow{P} b,\ \ a,b$常数$b \neq 0 \Rightarrow X_nY_n^{-1} \xrightarrow{P} ab^{-1}$；

（10）$X_n \xrightarrow{P} X,\ Y$是随机变量$\Rightarrow X_nY \xrightarrow{P} XY$；

（11）$X_n \xrightarrow{P} X,\ Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_nY_n \xrightarrow{P} XY$。

23、设$X_n \xrightarrow{P} X$。而g是R^1上的连续函数，试证$g(X_n) \xrightarrow{P} (X)$。

24、若$\{X_n\}$是单调下降的正随机变量序列，且$X_n \xrightarrow{P} 0$，证明$X_n \xrightarrow{a.s.} 0$。

25、若$X_1, X_2, \cdots$是独立随机变量序列，μ是整值随机变量，$P\{\mu = k\} = p_k$，且与$\{X_i\}$独立，求$\eta = X_1 + \cdots + X_\mu$的特征函数。

26、若$f(t)$是非负定函数，试证（1）$f(0)$是实的，且$f(0) \geq 0$；（2）$f(-t) = \overline{f(t)}$；（3）$|f(t)| \leq f(0)$。

27、用特征函数法直接证明德莫佛——拉普拉斯积分极限定理。

28、若母体ξ的数学期望$E\xi = m, D\xi = \sigma^2$，抽容量为$n$的子样求其平均值$\bar{\xi}$，为使$P\{|\bar{\xi} - m| < 0.1\sigma\} \geq 95\%$，问$n$应取多大值？

29、若$\{\xi_n, n = 1, 2, \cdots\}$为相互独立随机变量序列，具有相同分布$P\{\xi_n - 1\} = \frac{1}{2}$，$P\{\xi_n - 0\} = \frac{1}{2}$，而$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2_k}$，试证$\eta_n$的分布收敛于$[0,1]$上的均匀分布。

30、用特征函数法证明二项分布的普阿松定理。

31、用特征函数法证明，普阿松分布当$\lambda \to \infty$时，渐近正态分布。

计算Y_n的特征函数，并求$n \to \infty$时的极限。

32、设X_n独立同分布，$P\{X_n = 2^{k-2}\} = 2^{-k}\ \ (k = 1, 2, \cdots)$，则大数定律成立。

33、若$\{X_i\}$是相互独立的随机变量序列，均服从$N(0,1)$，试证$W_n = \sqrt{n}\frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$及

$U_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}}$ 渐近正态分布 $N(0,1)$。

34、设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立随机变量序列，均服从 $[0,1]$ 均匀分布，令 $Z_n=\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^{\frac{1}{n}}$，试证 $Z_n\xrightarrow{P}c$，这里 c 是常数，并求 c。

35、若 $\{X_i\}$ 是独立同分布随机变量序列，$EX_i=m$，若 $f(x)$ 是一个有界的连续函数，试证

$$\lim_{n\to\infty}E\left[f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right]=f(m)。$$

36、若 $\{X_i\}$ 是独立同分布、具有有限二阶矩的随机变量序列，试证 $\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\xrightarrow{P}EX_i$。

37、设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数，利用概率论方法证明：必存在多项式序列 $\{B_n(x)\}$，在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

38、设 $\{X_i\}$ 是独立随机变量序列，试证 $X_n\xrightarrow{a.s.}0$ 的充要条件为，对任意 $\varepsilon>0$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X_n|\geq\varepsilon\}<\infty$。

39、试证独立同分布随机变量序列，若存在有限的四阶中心矩，则强大数定律成立。

40、举例说明波雷尔——康特拉引理（i）之逆不成立。

41、设是相互独立且具有方差的随机变量序列，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{DX_k}{k^2}<\infty$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}DX_k=0$。

42、若 $\{\xi_k\}$ 是独立随机变量序列，方差有限，记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)$，$\eta_n=\dfrac{1}{n}S_n$。

（1）利用柯尔莫哥洛夫不等式证明 $p_m=P\left\{\max\limits_{2^{m+1}>n\geq 2^m}|\eta_n|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{1}{(2^m\varepsilon)^2}\sum_{j<2^m}D\xi_j$

（2）对上述 p_m，证明若 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{D\xi_k}{k^2}<\infty$，则 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m$ 收敛；

（3）利用上题结果证明对 $\{\xi_n\}$ 成立柯尔莫哥洛夫强大数定律。

43、（1）设 $\{c_k\}$ 为常数列，令

$s_n=\sum_{k=1}^{\infty}c_k$，$b_m=\sup\{|s_{m+k}-s_m|,k=1,2,\cdots\}$ $b=\inf\{b_m,m=1,2,\cdots\}$，试证 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ 收敛的充要条件是 $b=0$；

（2）（Kronecker 引理）对实数列$\{c_k\}$，若$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k}$收敛，则$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k \to 0$。

44、设$X_1, X_2, \cdots$是独立随机变量序列，对它成立中心极限定理，则对$\{X_n\}$成立大数定律的充要条件为$D\left(X_1+\cdots+X_n\right)=o(n^2)$。

45、设$X_1, X_2, \cdots$是独立同分布随机变量序列，且$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{\sqrt{n}}$对每一个$n=1,2,\cdots$有相同分布，那么，若$EX_i=0,\ DX_i=1$，则$X_i$必须是$N(0,1)$变量。

46、设$\{X_k\}$是独立随机变量序列，且X_k服从$N(0,2^{-k})$，试证序列$\{X_k\}$：（1）成立中心极限定理；（2）不满足费勒条件；（3）不满足林德贝格条件，从而说明林德贝格条件并不是中心极限定理成立的必要条件。

47、若$\{X_k\}$是独立随机变量序列，X_i服从$[-1,1]$均匀分布，对$k=2,3,\cdots,X_k$服从$N(0,2^{k-1})$，证明对$\{X_k\}$成立中心极限定理，但不满足费勒条件。

48、在普阿松试验中，第i次试验时事件 A 出现的概率为p_i，不出现的概率为q_i，各次试验是独立的，以ν_n记前n次试验中事件 A 出现的次数，试证：（1）$\frac{(\nu_n-E\nu_n)}{n}\xrightarrow{P}0$；（2）对$\frac{\left(\nu_n-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i}}$成立中心极限定理的充要条件是$\sum_{i=1}^{\infty}p_iq_i=+\infty$。

49、设$\{X_k\}$独立，X_k服从$[-k,k]$均匀分布，问对$\{X_k\}$能否用中心极限定理？

50、试问对下列独立随机变量序列，李雅普诺夫定理是否成立？

（1）$X_k:\begin{pmatrix}-\sqrt{k} & \sqrt{k}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；　（2）$X_k:\begin{pmatrix}-k^a & 0 & k^a\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，　$a>0$。

51、求证：当$n\to\infty$时，$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\to\frac{1}{2}$。

52、种子中良种率是$\frac{1}{6}$，现有 6000 粒种子，用契比雪夫不等式估计$p\left(\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<1\%\right)$至少是多少？(X 是这批种子中的良种数)

53、设螺丝钉的重量是一个r,ν期望值是 1 两，标准差是 0.1 两，求一盒(100 个)螺丝钉的重量超过 10.2 斤的概率（$\Phi_0(2)=0.97725$）

54、已知一本 300 页的书中每页印刷错误的个数服从泊松分布$P(0,2)$。求这本书的印刷错误总数不多

于 70 的概率。

55、100 台车床彼此独立地工作着。每台车床的实际工作时间占全部工作时间的 80%，求任一时刻有 70 台至 86 台车床工作的概率。

56、叙述并证明贝努力大数定律。

57、若 $\{\xi_n\} n=1\cdot2\cdots$ 是独立的随机变量序列，且 ξ_k 的分布列是 $\begin{pmatrix} \sqrt{\ln(1+k)} & -\sqrt{\ln(1+k)} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$k=1\cdot2\cdots$，证明 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律。

58、设 $\{\xi_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，且 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $\sqrt{n}$ 的泊松分布，证明 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律。

59、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots$。证明：

$P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-1$。其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。

60、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，且设 $E(X_i^k)=\gamma_k$，$(k=1,2,3,4;\ i=1,2,\cdots)$。证明：当 n 充分大时

$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，近似服从正态分布 $N\left(\gamma_2,\frac{\gamma_4-\gamma_2^2}{n}\right)$。

61、若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为正的独立随机变量，服从相同分布，密度函数为 $f(x)$，试证：

$E\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k}{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}\right)=\frac{k}{n}$

62、若 ξ_k 的分布列为 $\begin{pmatrix} \sqrt{\ln k} & -\sqrt{\ln k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，试证大数定律适用于独立随机变量序列 $\{\xi_k\}$。

63、验证概率分布如下给定的独立随机变量序列是否满足马尔可夫条件：

（1）$P\{X_k=\pm2^k\}=\frac{1}{2}$；

（2）$P\{X_k=\pm2^k\}=2^{-(2k+1)}$，$P\{X_k=0\}=1-2^{-2k}$；

（3）$P\{X_k=\pm2^k\}=\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}$，$P\{X_k=0\}=1-k^{-\frac{1}{2}}$。

64、用德莫哇佛——拉普拉斯定理证明：在贝努里试验中，$0<p<1$，则不管 k 是如何大的常数，总有 $P\{|\mu_n-np|<k\}\to0\ (n\to\infty)$。

65、若 X_n 的概率分布为 $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$，试证相应的分布函数收敛，但矩不收敛。

66、设 $X_n \xrightarrow{P} X$。而 g 是 R^1 上的连续函数，试证 $g(X_n) \xrightarrow{P} (X)$。

67、若 $\{X_n\}$ 是单调下降的正随机变量序列，且 $X_n \xrightarrow{P} 0$，证明 $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$。

68、若 $\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$ 为相互独立随机变量序列，具有相同分布 $P\{\xi_n - 1\} = \frac{1}{2}$，$P\{\xi_n - 0\} = \frac{1}{2}$，而

$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2_k}$，试证 η_n 的分布收敛于 $[0,1]$ 上的均匀分布。

69、用特征函数法证明二项分布的普阿松定理。

70、用特征函数法证明，普阿松分布当 $\lambda \to \infty$ 时，渐近正态分布。

71、设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立随机变量序列，均服从 $[0,1]$ 均匀分布，令 $Z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$，试证 $Z_n \xrightarrow{P} c$，这里 c 是常数，并求 c。

72、若 $\{X_i\}$ 是独立同分布、具有有限二阶矩的随机变量序列，试证 $\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i \xrightarrow{P} EX_i$。

73、设是相互独立且具有方差的随机变量序列，若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_k}{k^2} < \infty$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} DX_k = 0$。

74、若 $\{X_k\}$ 是独立随机变量序列，X_i 服从 $[-1,1]$ 均匀分布，对 $k=2,3,\cdots$，X_k 服从 $N(0, 2^{k-1})$，证明对 $\{X_k\}$ 成立中心极限定理，但不满足费勒条件。

75、求证：当 $n \to \infty$ 时，$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}$。

第五章　解答

1、证：对任意 $x > o$，$P\{|\xi| \geq x\} = \int\limits_{|y|\geq x} dF(y) \leq \frac{1}{f(x)} \int\limits_{|y|\geq x} f(|y|) dF(y)$

$$\leq \frac{1}{f(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(|y|) dF(y) = \frac{1}{f(x)} Ef(|\xi|)。$$

2、证：对任意 $x>o$， $P\{\xi \ge x\}=\int\limits_{y\ge x} dF(y)\le \frac{1}{e^{ax}}\int\limits_{y\ge x} e^{ay}dF(y)\le \frac{1}{e^{ax}}\int_0^\infty e^{ay}dF(y)=e^{-ax1}Ee^{a\xi}$ 。

3、证： $h(\xi)$ 为非负随机变量，所以对 $c>0$ 有

$$P\{h(\xi)\ge c\}=\int\limits_{x\ge c} dF_h(x)\le \frac{1}{c}\int\limits_{x\ge c} xdF_h(x)\le \frac{1}{c}\int_0^\infty xdF_h(x)=\frac{1}{c}Eh(\xi)\text{。}$$

4、解：现验证何时满足马尔可夫条件 $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)\to 0$， $E\xi_k=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k^2=0$，

$D\xi_k=\frac{1}{2}k^{2s}+\frac{1}{2}k^{2s}=k^{2s}$。若 $s<\frac{1}{2}$，这时 $2s-1<0$，利用 ξ_k 间的独立性可得

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k^{2s}\le \frac{n\cdot n^{2s}}{n^2}=n^{2s-1}\to 0\ (n\to\infty)\text{。}$$

若 $s\ge\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k^{2s}\ge \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k=\frac{n+1}{2n}\not\to 0\ (n\to\infty)$。

所以当时，大数定律可用于独立随机变量序列。

5、证：（1） $EX_k=0$， $DX_k=\left(2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(-2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2}=4k$，

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n DX_k=\frac{1}{n^2}\times\frac{4-4^{n+1}}{1-4}=\frac{4^{n+1}}{3n^2}-\frac{4}{3n^2}\to 0\ (n\to\infty)\text{。}$$

不满足马尔可夫条件。

（2） $EX_k=0,\ DX_k=\left(2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}+\left(-2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=1$，

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)\text{。}$$

满足马尔可夫条件。

（3） $EX_k=0,\ DX_k=k^2\cdot\frac{1}{2k^{\frac{1}{2}}}+\left(-k\right)^2\cdot\frac{1}{2k^{\frac{1}{2}}}=k^{\frac{3}{2}}$，

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k^{\frac{3}{2}}\ge\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)\text{。}$$

不满足马尔可夫条件。

6、证：因为 $\xi_k,\xi_1(|k-l|\ge 2)$ 是独立的，所以

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)\right]^2=\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)^2+2\sum_{k=1}^{n-1}(\xi_k-E\xi_k)(\xi_{k+1}-E\xi_{k+1})\right]$$

$$=\frac{n}{n^2}D\xi_k+\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}r_{k,k+1}\sigma^2\le\frac{\sigma^2}{n}+\frac{2}{n}\sigma^2=\frac{3}{n}\sigma^2\to 0\ \ (n\to\infty)$$

其中利用$\left|r_{k,k+1}\right|\le 1$且$\sigma$有限。马尔可夫条件成立，所以对序列$\{\xi_n\}$成立大数定律。

7、证：由题中条件可得，对任给$c>0$，存在N，使当$|j-i|>N$时有$|r_{ij}|<\frac{\varepsilon}{4e}$（设$c>0$），则

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k+\frac{1}{n^2}\cdot 2\sum_{n\ge j>i\ge 1}r_{ij}\sigma_i\sigma_j\le\frac{1}{n^2}\cdot nc+\frac{2}{n^2}\sum_{i<j}|r_{ij}|\sigma_i\sigma_j$$

$$\le\frac{c}{n}+\frac{2}{n^2}\sum_{N\ge j-i,j<i}|r_{ij}|\sigma_i\sigma_j+\frac{2}{n^2}\sum_{j-i>N}|r_{ij}|\sigma_i\sigma_j.$$

在上式前一个和式中，i可以依次取$1,2,\cdots,n$；对每个固定的i来说，由于$j-i\le N$且$i<j$，所以至多对应N项；从而和式中至多有nN项，在后一个和式中，由于$j>i$，所以对i取$1,2,\cdots,n$，至多依次对应$n-1,n-2,\cdots 2,1$项，从而和式中至多有$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\ =\frac{1}{2}n(n-1)$项，利用$|r_{ij}|\le 1$可得

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\le\frac{c}{n}+\frac{2}{n^2}\cdot nN\cdot c+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{4c}\cdot c=\frac{c}{n}+\frac{2Nc}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{4}。$$

当n充分大时，上式右方之值可以小于ε，所以 $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to 0\ \ (n\to\infty)$。

对$\{\xi_n\}$大数定律成立。

8、证：充分性。$s=\frac{t^2}{(1+t^2)}$是$(t>0)$的增函数，所以对任给$\varepsilon>0$有

$$P\{|\eta_n-a_n\ge\varepsilon\}=\int_{|y-a_n|\ge\varepsilon}dF_{\eta_n}(y)\le\frac{1}{\dfrac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}\int_{|y-a_n|\ge\varepsilon}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}dF_{\eta_n}(y)\le\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}E\left\{\frac{(\eta_n-a_n)^2}{1+(\eta_n-a_n)^2}\right\}$$

所以当$E\left\{\frac{(\eta_n-a_n)^2}{1+(\eta_n-a_n)^2}\right\}\to 0$时有$P\{|\eta_n-a_n\ge\varepsilon\}\to 0$，此时$\{\xi_i\}$服从大数定律。

必要性。设$\{\xi_i\}$服从大数定律，即$\lim_{n\to\infty}P\{|\eta_n-a_n|\ge\varepsilon\}=0$，则对任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当

$n>N$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\eta_n-a_n|\geq\varepsilon\}\leq\varepsilon$。由 $s=\dfrac{t^2}{(1+t^2)}$ 关于 $(t>0)$ 的单调性和 $0<s<1$ 得

$$0\leq E\left\{\frac{(\eta_n-a_n)^2}{1+(\eta_n-a_n)^2}\right\}\leq\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}P\{|\eta_n-a_n\geq\varepsilon\}+1\cdot P\{|\eta_n-a_n\geq\varepsilon\}$$

$<\varepsilon^2+\varepsilon<2\varepsilon$（当 ε<1 时）。

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}E\left\{\frac{(\eta_n-a_n)^2}{1+(\eta_n-a_n)^2}\right\}=0。$$

9、证：斯特灵公式为 $m!=\sqrt{2\pi m}\,m^m e^{-m}e^{\theta m},\ 0<0_m<\dfrac{1}{12m}$。由此得

$$\binom{2n}{n-m}\left(\frac12\right)^{2n}=\frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}\left(\frac12\right)^{2n}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}(2n)^{2n}e^{-2n}\left(\frac12\right)^{2n}e^{\theta}}{\sqrt{2\pi(n-m)}(n-m)^{n-m}e^{-(n-m)}\sqrt{2\pi(n+m)}}\times\frac{1}{(n+m)^{n+m}e^{-(n+m)}}$$

$$|\theta|<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2n}{n^2-m^2}}\left(\frac{n}{n+m}\right)^{n+m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m}e^{\theta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2n}{n^2-m^2}}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-(n+m)}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-(n-m)}e^{\theta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}}\frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)^m}{\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{m}{n}\right)^m}e^{\theta}\tag{1}$$

若 $\alpha\to0,\beta\to\infty$，则当

$$\beta\alpha^2=o(1)\tag{2}$$

时，才有下式成立：

$$(1+\alpha)^{\beta}=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta}\sim e^{\alpha\beta}\tag{3}$$

此题未必满足（2）式，所以不加条件地利用（3）式证是不妥的。这里结论的证明很简单。若利用（3）式估计（1）式值，则应有 $\dfrac{m^3}{n^2}=o(1),\ \dfrac{m^4}{n^3}=o(1)$。后一式蕴含在前一式中，即应补设前一条件成立，利用（3）才可证得结论。下面用另一种证法证明。

视 n,m 为连续变量进行估值，然后再置 n,m 为取正整数的变量，结论也应成立。利用台劳展式

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{n}+o(x^n)\qquad(-1<x\le 1),$$

由 $\frac{m}{n}\to 0$ 得

$$\ln\frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)^m}{\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{m}{n}\right)^m}$$

$$=m\ln\left(1-\frac{m}{n}\right)-n\ln\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)-m\ln\left(1+\frac{m}{n}\right)$$

$$=m\left(-\frac{m}{n}-\frac{m^2}{2n^2}-\frac{m^3}{3n^3}-\frac{m^4}{4n^4}-\frac{m^5}{5n^5}-\cdots\right)-n\left(-\frac{m^2}{n^2}-\frac{m^4}{2n^4}-\frac{m^6}{3n^6}-\cdots\right)$$

$$-m\left(-\frac{m}{n}-\frac{m^2}{2n^2}-\frac{m^3}{3n^3}-\frac{m^4}{4n^4}-\frac{m^5}{5n^5}-\cdots\right)$$

$$=-\frac{m^2}{n}-\frac{1}{6}\frac{m^4}{n^3}-\frac{1}{15}\frac{m^6}{n^5}-\cdots=-\frac{m^2}{n}-\frac{m^4}{n^3}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\frac{m^2}{n^2}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{m^2}{n}-\frac{m^4}{n^3}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)$$

$$\frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)^m}{\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{m}{n}\right)^m}=e^{-\frac{m^2}{n}-\frac{m^4}{n^3}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)}$$

由题设条件得

$$\frac{m^4}{n^3}=\frac{m^2}{n}\left(\frac{m}{n}\right)^2=o\left(\frac{m^2}{n}\right),$$

所以要证明的结论中只能是 $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}e^{-\frac{m^2}{n}}$，在题设条件下显然有 $e^{\theta}\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}\to 1$，所以欲

$$\binom{2n}{n-m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\frac{1}{\sqrt{n\pi}}e^{-\frac{m^2}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}}\frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)^m}{\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{m}{n}\right)^m}e^{\theta}\div\frac{1}{\sqrt{n\pi}}e^{-\frac{m^2}{n}}$$

$$=\frac{e^{\theta}}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}}e^{-\frac{m^2}{n}-\frac{m^4}{n^3}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)}$$

必须且只需 $\frac{m^4}{n^3}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)=o(1)$，即 $\frac{m^4}{n^3}\to 0$。

这条件必须在题中补设出来，即再当 $\frac{m^4}{n^3}\to 0$ 时有 $\binom{2n}{n-m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}e^{-\frac{m^2}{n}}$。

10、**解**：每个终端在某时刻使用的概率为 0.05，ξ 表示在某时刻同时使用的终端数。则

$$P\{\mu_n=k\}=C_{120}^{k}(0.05)^k(0.95)^{120-k}$$

由积分极限定理得

$$P\{120\ge\xi\ge 10\}=1-P\{\xi<10\}=1-P\left\{\frac{\xi-6}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}<\frac{10-6}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(1.675)=0.047\text{。}$$

即有 10 个或更多个终端在使用的概率为 0.047。

11、**证**：当 $x>0$ 时有

$$\int_x^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\le\int_x^{\infty}\frac{t}{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{1}{x}\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)\Bigg|_x^{\infty}=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\int_x^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\ge\int_x^{\infty}\frac{t^4+2t^2-1}{t^4+2t^2+1}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\int_x^{\infty}d\left(-\frac{t}{1+t^2}e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)=\frac{-t}{1+t^2}e^{-\frac{1}{2}t^2}\Bigg|_x^{\infty}=\frac{x}{1+x^2}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

所以不等式成立。

12、**证**：利用德莫哇佛——拉普拉斯积分定理得

$$P\{|\mu_n-np|<k\}=P\left\{\frac{|\mu_n-np|}{\sqrt{npq}}<\frac{k}{\sqrt{npq}}\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-k}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k}{\sqrt{npq}}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

在如上积分中，积分区间长度 $\frac{2k}{\sqrt{npq}}\to 0$，所以 $P\{|\mu_n-np|<k\}\to 0\ (n\to\infty)$。

13、**解**：设需要投掷 n 次，用车贝晓夫不等式得（p=0.5）

$$P\left\{0.4<\frac{\mu_n}{n}<0.6\right\}=P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-0.5\right|<0.1\right\}\ge 1-\frac{1}{0.1^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0.9$$

$\frac{1}{0.04n}=0.1$，取 $n\ge\frac{1000}{4}=250$。用积分极限定理得

$$P\left\{0.4<\frac{\mu_n}{n}<0.6\right\}=P\left\{\left|\frac{\mu_n-0.5}{\sqrt{npq}}\right|<\frac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)-1=0.9$$

$\Phi\left(\frac{1}{5}\sqrt{n}\right)=0.95,\ -\frac{1}{5}\sqrt{n}=1.645,\ n=67.65$ 取 $n\geq 68$。

14、**解**：利用车贝晓夫不等式估计值为：$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{\frac{npq}{n^2}}{\varepsilon^2}=\frac{pq}{n\varepsilon^2}$。

利用德莫哇佛 ——拉普拉斯积分定理估值为：

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq P\left\{\left|\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\right|\geq\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right\}\approx\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{pq}}{\varepsilon\sqrt{n}}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2pq}{n\pi}}e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2pq}}=o\left(\frac{pq}{n\varepsilon^2}\right)(n\to\infty)$$

两者比较，后者估计精确得多。

15、解：任选 6000 粒可看作 6000 重贝努里试验,,由积分极限定理得

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\}=P\left\{\frac{\left|\mu-6000\times\frac{1}{6}\right|}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{8}}}\leq\frac{0.01\sqrt{6000}}{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{8}}}\right\}$$

$$\approx\Phi(2.078)-\Phi(-2.078)=2\Phi(2.078)-1=2.98124-1\approx 0.96\text{。}$$

16、解：与上题同理得

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{6000}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\frac{\left|\mu-6000\times\frac{1}{6}\right|}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{8}}}\leq 120\sqrt{3}\varepsilon\right\}=0.99,$$

$2\Phi(120\sqrt{3}\varepsilon)-1=0.99,\quad \Phi(120\sqrt{3}\varepsilon)=0.995$，

$120\sqrt{3}\varepsilon=2.58,\quad \varepsilon=0.0124$。

把 $\varepsilon=0.0124$ 代入上式计算得

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.0124\right\}=P\{|\mu-1000|<74.4\}=P\{925<\mu<1075\}=0.99\text{。}$$

所以相应的良种数应落在 925 粒与 1075 粒之间。

17、解：在蒲丰试验中，频率与概率之差为 $\frac{2048}{4040}-\frac{1}{2}=\frac{28}{4040}=0.00693$。由积分极限定理得要求的概率为

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{4040}-\frac{1}{2}\right|\le 0.00693\right\}=P\left\{\frac{|\mu-2020|}{\sqrt{4040\times\frac{1}{4}}}\le\frac{0.00693\times\sqrt{4040}}{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{|\mu-2020|}{\sqrt{4040\times\frac{1}{4}}}\le 0.88\right\}\approx 2\Phi(0.88)-1$$

$$=2\times 0.8106-1\approx 0.621。$$

18、证：由于 $F(x)$ 有界非降，$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，故对任意 $\varepsilon>0$，可找到 $M>0$，使当

$x\ge M$ 时有 $$1-F(x)<\varepsilon，\quad (1)$$

且当 $x\ge -M$ 时有 $$F(x)<\varepsilon。\quad (2)$$

由于 $F_n(x)$ 处处收敛于 $F(x)$，故存在一正整数 N，使当 $n>N_1$ 时，一方面有

$$|F_n(-M)-F(-M)|<\varepsilon。$$

由（2）得 $$F_n(-M)<2\varepsilon \quad (3)$$

另一方面又有 $$|F_n(M)-F(M)|<\varepsilon，$$

由（1）得 $$1-F_n(M)<2\varepsilon \quad (4)$$

因此，对 $x<-M$，若 $n\ge N_1$，则由（2），（3）有

$$|F_n(x)-F(x)|<|F_n(x)|+F(x)\le F_n(-M)+F(-M)<3\varepsilon。\quad (5)$$

同样，对 $x>M$，如果 $n>N_1$，则由（1），（4）有

$$|F_n(x)-F(x)|<|(1-F_n(x))-(1-F(x))|<|1-F_n(x)|+|(1-F(x)|$$

$$\le 1-F_n(M)+1-F(M)<3\varepsilon \quad (6)$$

在有限闭区间 $[-M,M]$ 上，$F(x)$ 连续，故也均匀连续，因而在 $[-M,M]$ 上可找到 t 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_t,x_k=-M,x_t=M$，使

$$F(x_{i+1})-F(x_i)<\varepsilon \quad (i=1,2,\cdots,t-1)。\quad (7)$$

还可找到 $N_2>N_1$，使在此 t 个点中的每一点上，当 $n>N_2$ 时有

$$|F_n(x_i)-F(x_i)|<\varepsilon。\quad (8)$$

于$[-M,M]$中任取一x，则此x必属于某一$[x_i,x_{i+1}]$，因此当$n>N_2$时，由（8）得

$$F_n(x)\le F_n(x_{i+1})<F(x_{i+1})+\varepsilon \tag{9}$$

及

$$F_n(x)\ge F_n(x_i)>F(x_i)-\varepsilon \tag{10}$$

由此及（9），（7）得

$$F_n(x)-F(x)<F(x_{i+1})-F(x)+\varepsilon\le F(x_{i+1})-F(x_i)+\varepsilon<2\varepsilon。 \tag{11}$$

同样由（10）及（7）得

$$F_n(x)-F(x)>F(x_i)-F(x)-\varepsilon\ge F(x_i)-F(x_{i+1})-\varepsilon>-2\varepsilon。 \tag{12}$$

故当$n>N_2$时，由（5），（6），（11），（12）得，对任意$x\in R_1$有 $|F_n(x)-F(x)|<3\varepsilon$。

19、证：由$X_n\xrightarrow{P}X$可推得$X_n\xrightarrow{L}X$，从而$F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)$，由上题即得证。

20、证：$F_n(x)=P\{X_n,x\}=\begin{cases}0, & 当x\le 0\\ 1-\dfrac{1}{n}, & 当0<x\le n\\ 1, & 当x<n\end{cases}$。令$n\to\infty$得 $F_n(x)\to F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$。

这说明分布函数收敛，但 $EX_n=1,\ EX=0,\ EX_n\nrightarrow EX(n\to\infty)$。当$k>1$时，

$$EX_n^k=n^k\cdot\frac{1}{n}=n^{k-1},$$

$$E(X_n-EX_n)^k=E(X_n-1)^k=(-1)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)+(n-1)^k\cdot\frac{1}{n}$$

所以当$n\to\infty$时，$EX_n^k\to\infty$，$E(X_n-EX_n)^k\to\infty$。由此知其中心距，原点矩均不收敛。

21、证：题中分布函数收敛系数指弱收敛。

（**I**）设$x-c$是$F(x)$的连续点，现证$F_{\zeta_n}(x)\to F(x-c)$。对任给$\varepsilon>0$，有

$$\{\xi_n+\eta_n<x\}=\{\xi_n+\eta_n<x,|\eta_n-c|<\varepsilon\}\cup\{\xi_n+\eta_n<x,|\eta_n-c|\ge\varepsilon\}$$

上式中右边两事件依次记为S_1,S_2，则$S_1\cap S_2=\phi$，

$$F_{\zeta_n}(x)=P\{\xi_n+\eta_n<x\}=P(S_1)+P(S_2), \tag{1}$$

我们有 $P\{\xi_n<x-(c+\varepsilon),|\eta_n-c|\ge\varepsilon\}\le P\{\xi_n<x-(c+\varepsilon),|\eta_n-c|\le\varepsilon\}\le P(S_1)$

$$\le P\{\xi_n<x-(c+\varepsilon),|\eta_n-c|<\varepsilon\}$$

$$\le P\{\xi_n<x-(c+\varepsilon)\} \tag{2}$$

由（1），（2）得

$$P\{\xi_n<x-(c+\varepsilon)\}-P\{|\eta_n-c|\ge\varepsilon\}+P(S_2)\le P\{\xi_n+\eta_n<x\}\le P\{\xi_n<x-(c-\varepsilon)\}+P(S_2)$$

此式对任意 n 成立，所以

$$\begin{aligned}&\varliminf_{n\to\infty}P\{\xi_n<x-(c+\varepsilon)\}+\varliminf_{n\to\infty}\left[P(S_2)-P\{|\eta_n-c|\ge\varepsilon\}\right]\\ &\le\varliminf_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le\varlimsup_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le\varlimsup_{n\to\infty}P\{\xi_n<x-(c+\varepsilon)\}+\varlimsup_{n\to\infty}P(S_2)\end{aligned}\qquad(3)$$

由 $\eta_n\xrightarrow{P}c$ 得 $\qquad P(S_2)\le P\{|\eta_n-c|\ge\varepsilon\}\to0\ (n\to\infty)$。

再适当选取 ε 使 $x-c-\varepsilon$ 同是 $F(x)$ 的连续点，利用弱收敛性由（3）可得

$$F(x-c-\varepsilon)\le\varliminf_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le\varlimsup_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le F(x-c+\varepsilon)。\qquad(4)$$

由于 $F(x)$ 单调增加，其至多有可列个不连续点，这里对 ε 的限制丝毫不影响以下结论成立。

由于 ε 是任意的且 $x-c$ 是 $F(x)$ 的连续点，由（4）得

$$\lim_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\to F(x-c)。$$

所以 $F_{\zeta_n}(x)\xrightarrow{W}F(x-c)$。

（**II**）设 $cx(x\ne0)$ 是 $F(x)$ 的连续点，对任给 $\varepsilon>0\ (0<\varepsilon<c)$，

$$\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<x\right\}=\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<x,|\eta_n-c|<\varepsilon\right\}\cup\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<x,|\eta_n-c|\ge\varepsilon\right\}=S_1\cup S_2\quad（记），$$

则 $\quad S_1\cap S_2=\phi,\ P(S_2)\le P\{|\eta_n-c|\ge\varepsilon\}\to0\ (n\to\infty)$。

另外，$P(S_1)$ 介于如下两概率之间：

$$P\{\xi_n<(c-\varepsilon)x,|\eta_n-c|<\varepsilon\},\quad P\{\xi_n<(c+\varepsilon)x,|\eta_n-c|<\varepsilon\},$$

对这两个概率值又分别有

$$0\le P\{\xi_n<(c-\varepsilon)x\}-P\{\xi_n<(c-\varepsilon)x,|\eta_n-c|<\varepsilon\}\le P\{|\eta_n-c|\ge\varepsilon\},$$

$$0\le P\{\xi_n<(c+\varepsilon)x\}-P\{\xi_n<(c+\varepsilon)x,|\eta_n-c|<\varepsilon\}\le P\{|\eta_n-c|\ge\varepsilon\}。$$

取极限可得，当 $x>0$ 时有（若 $x<0$，则下式前后两项分别改成取上，下极限，且调换前后之位置），

$$\varliminf_{n\to\infty}F_n((c-\varepsilon)x\}\le\varliminf_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le\varlimsup_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le\varlimsup_{n\to\infty}F_n((c+\varepsilon)x)。$$

可适取 ε，使 $(c-\varepsilon)$ 与 $(c+\varepsilon)x$ 都是 $F(x)$ 的连续点，当 $x>0$ 时，由弱收敛性得（若 $x<0$，则前后两项调换位置），

$$F((c-\varepsilon)x)\le\varliminf_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le\varlimsup_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)\le F_n((c+\varepsilon)x)。$$

由 ε 的任意性及 cx 是 $F(x)$ 的连续点得

$$\lim_{n\to\infty}F_{\zeta_n}(x)=F(cx)。$$

若 $cx=0$（从而 $x=0$）是 $F(x)$ 的连续点，则对任意 $\varepsilon>0\ (\varepsilon<0)$ 有

$$F_{\zeta_n}(0)=P\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<0\right\}=P\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<0,|\eta_n-c|<\varepsilon\right\}+P\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<0,|\eta_n-c|\geq\varepsilon\right\}$$

$$=P\{\xi_n<0,|\eta_n-c|<\varepsilon\}+P\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<0,|\eta_n-c|\geq\varepsilon\right\}$$

$$=P\{\xi_n<0\}+P\{\xi_n<0,|\eta_n-c|\geq\varepsilon\}+P\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<0,|\eta_n-c|\geq\varepsilon\right\}。$$

等式右边三项中，由 $F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)$ 得第一项 $P\{\xi_n<0\}=F_n(0)\to F(0)$，其余两项中概率值均不超过 $P\{|\eta_n-c|\geq\varepsilon\}$，所以右边从而左边极限存在。取有限可得 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{\eta_n}(0)=F(0)$。

至此得证 $F_{\zeta_n}(x)\xrightarrow{W}F(cx)$。

22、证：（**1**）$P\{|X_n-X-0|\geq\varepsilon\}=P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}\to0$，　$\therefore$　$X_n-X\xrightarrow{P}0\ (n\to\infty)$。

（**2**）对任给 $\varepsilon>0$，

$$P\{|X-Y|\geq\varepsilon\}+P\{|X-X_n+X_n-Y|\geq\varepsilon\}$$

$$\leq P\{|X_n-X|\geq\frac{1}{2}\varepsilon\}+P\{|X_n-Y|\geq\frac{1}{2}\varepsilon\}\to0\ (n\to\infty)$$

由 ε 的任意性得 $P\{X\neq Y\}=0$，所以 $P\{X=Y\}=1$。

（**3**）$P\{|X_n-X_m|\geq\varepsilon\}=P\{|X_n-X+X-X_m|\geq\varepsilon\}$

$$\leq P\{|X_n-X|\geq\frac{1}{2}\varepsilon\}+P\{|X_m-X|\geq\frac{1}{2}\varepsilon\}\to0$$

$\therefore$　$X_nX_m\xrightarrow{P}0\ (n,m\to\infty)$。

（**4**）$P\{|(X_n\pm Y)-(X\pm Y_n)|\geq\varepsilon\}=P\{|(X_n-X)\pm(Y_n-Y)|\geq\varepsilon\}$

$$\leq P\{|X_n-X|\geq\frac{1}{2}\varepsilon\}+P\{|Y_n-Y|\geq\frac{1}{2}\varepsilon\}\to0$$

$\therefore$　$X_n\pm Y_n\xrightarrow{P}X\pm Y\ (n\to\infty)$。

（**5**）若 $k=0$，显然有 $kX_n\xrightarrow{P}kX\ (n\to\infty)$。若 $k\neq0$，则

$$P\{|kX_n-kX|\geq\varepsilon\}=P\{|k||X_n-X|\geq\varepsilon\}=P\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{|k|}\}\to0$$

$\therefore$　$kX_n\xrightarrow{P}kX\ (n\to\infty)$。

（6）$P\{|X_n^2-X^2|\ge\varepsilon\}=P\{|X_n-X|^2\ge\frac{1}{2}\varepsilon\}+P\{2|X||X_n-X|\ge\frac{1}{2}\varepsilon\}$

$$\le P\{|X_n-X|^2\ge\frac{1}{2}\varepsilon\}+P\{|X_n-X|\ge\frac{1}{2}\varepsilon\}$$

$$=P\left\{|X_n-X|\ge\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon}\right\}+P\left\{|X||X_n-X|\ge\frac{1}{4}\varepsilon\right\}$$

对任给$\delta>0$，取$M>0$，使$P\{|X|>M\}<\frac{1}{3}\delta$，再取$N$使当$n>N$时有

$$P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{(4M)}\right\}<\frac{1}{3}\delta\text{，且 }P\left\{|X_n-X|\ge\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon}\right\}<\frac{\delta}{3}$$

因为 $\left\{|X||X_n-X|\ge\frac{1}{4}\varepsilon\right\}\subset\{|X|>M\}\cup\left\{|X|\le M,|X|\,|X_n-X|\ge\frac{1}{4}\varepsilon\right\}$

$$\subset\{|X|>M\}\cup\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{(4M)}\right\}$$

所以当$n>N$时有

$$P\{|X_n^2-X^2|\ge\varepsilon\}\le P\left\{|X_n-X|\ge\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon}\right\}+P\{|X|>M\}+P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{(4M)}\right\}$$

$$\le\frac{1}{3}\delta+\frac{1}{3}\delta+\frac{1}{3}\delta=\delta,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n^2-X^2|\ge\varepsilon\}=0$，即$X_n^2\xrightarrow{P}X^2$ $(n\to\infty)$。

（7）$P\{|X_nY_n-ab|\ge\varepsilon\}$

$$=P\{|X_nY_n-aY_n-bX_n+ab+aY_n+bX_n-2ab|\ge\varepsilon\}$$

$$=P\{|(X_n-a)(Y_n-b)+a(Y_n-b)+b(X_n-a)|\ge\varepsilon\}$$

$$\le P\left\{|(X_n-a)(Y_n-b)|\ge\frac{1}{3}\varepsilon\right\}+P\left\{|a(Y_n-b)|\ge\frac{1}{3}\varepsilon\right\}+P\left\{|b(X_n-a)|\ge\frac{1}{3}\varepsilon\right\}$$

$$\le P\left\{|X_n-a|\ge\sqrt{\frac{1}{3}\varepsilon}\right\}+P\left\{|Y_n-b|\ge\sqrt{\frac{1}{3}\varepsilon}\right\}+P\left\{|a||Y_n-b|\ge\frac{1}{3}\varepsilon\right\}$$

$$+P\left\{|b||X_n-a|\ge\frac{1}{3}\varepsilon\right\}\to0,$$

$\therefore$ $X_nY_n\xrightarrow{P}ab$ $(n\to\infty)$。

（8）$P\{|X_n^{-1}-1|\ge\varepsilon\}=P\left\{\frac{|1-X_n|}{|X_n|}\ge\varepsilon\right\}$

$$\le P\left\{|X_n|\le\frac{1}{2}\right\}+P\left\{|X_n|>\frac{1}{2},\frac{|1-X_n|}{|X_n|}\ge\varepsilon\right\}$$

$$\le P\left\{|X_n-1|\ge\frac{1}{2}\right\}+P\left\{|1-X_n|\ge\frac{1}{2}\varepsilon\right\}\to 0,$$

$\therefore\quad X_n^{-1}\xrightarrow{P}1\ (n\to\infty)$。

（**9**）在（8）中令 $X_n=\dfrac{Y_n}{b}$，再利用（5）由 $Y_n\xrightarrow{P}b$ 可证得 $Y_n^{-1}\xrightarrow{P}b^{-1}$；再现（7）中 Y_n 为这里 Y_n^{-1} 即得证。

（**10**）对任给 $\delta>0$，取 $M>0$，使 $P\{|Y|>M\}<\frac{1}{2}\delta$。再取 N，使当 $n>N$ 时，$P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{M}\right\}<\frac{1}{2}\delta$，则

$$P\{|X_nY-XY|\ge\varepsilon\}=P\{|Y||X_n-X|\ge\varepsilon\}\le P\{|Y|>M\}+P\{|Y|\le M,|Y||X_n-X|\ge\varepsilon\}$$

$$\le P\{|Y|>M\}+P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{M}\right\}<\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta=\delta,$$

$\therefore\quad X_nY\xrightarrow{P}XY\ (n\to\infty)$。

（**11**）对任给 $\delta>0$，取 $M>0$ 及 N，使当 $n>N$ 时如下五式同时成立：

$$P\left\{|X|\ge\frac{1}{2}M\right\}<\frac{1}{8}\delta,\quad P\left\{|X_n-X|\ge\frac{1}{2}M\right\}<\frac{1}{8}\delta,\quad P\{|Y|\ge M\}<\frac{1}{4}\delta,$$

$$P\left\{|Y_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{(2M)}\right\}<\frac{1}{4}\delta,\quad P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{(2M)}\right\}<\frac{1}{4}\delta。$$ 则当 $n>N$ 时有

$$P\{|X_n|\ge M\}=P\left\{|X|\ge\frac{1}{2}M,|X_n|\ge M\right\}+P\left\{|X|<\frac{1}{2M},|X_n|\ge M\right\}$$

$$\le P\left\{|X|\ge\frac{1}{2}M\right\}+P\left\{|X|<\frac{1}{2}M,|X_n-X|\ge\frac{1}{2}M\right\}<\frac{1}{8}\delta+\frac{1}{8}\delta=\frac{1}{4}\delta。$$

从而

$$P\{|X_nY_n-XY|\ge\varepsilon\}=P\{|X_nY_n-X_nY+X_nY-XY|\ge\varepsilon\}$$

$$\le P\left\{|X_n||Y_n-Y|\ge\frac{1}{2}\varepsilon\right\}+P\left\{|Y||X_n-X|\ge\frac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

$$\le P\{|X_n|\ge M\}+P\left\{|X_n|<M,|X_n||Y_n-Y|\ge\frac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

$$+P\{|Y|\geq M\}+P\left\{|Y|<M,|Y|\ |X_n-X|\geq\frac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

$$\leq P\{|X_n|\geq M\}+P\left\{|Y_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{(2M)}\right\}$$

$$+P\{|Y|\geq M\}+P\left\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{(2M)}\right\}<\frac{1}{4}\delta\times 4$$

$$=\delta,$$

$\therefore\quad X_nY_n\xrightarrow{P}XY\ (n\to\infty)$。

23、证法一：对任给$\delta>0$，取$M>0$及N_1，使当$n>N_1$时有

$$P\{|X|\geq M\}<\frac{1}{3}\delta,\quad P\{|X_n-Y|\geq M\}<\frac{1}{3}\delta。$$

$g(x)$在$[-2M,2M]$上一致连续，则对任给$\varepsilon>0$，存在$\varepsilon_1>0$，使当$x_1,x_2\in[-2M,2M]$且$|x_1-x_2|<\varepsilon_1$时有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$。

再取$N\geq N_1$，使当$n>N$时有 $P\{|X_n-X|\geq\varepsilon_1\}<\frac{1}{3}\delta$。

由于 $\{|X|\geq 2M\}\cup\{|X_n|\geq 2M\}\subset\{|X|\geq M\}\cup\{|X|\leq M,|X_n|\geq 2M\}$

$$\subset\{|X|>M\}\cup\{|X_n-X|\geq M\},$$

$$\{|X|\leq 2M,\ |X_n|\leq 2M,\ |g(X_n)-g(X)|\geq\varepsilon\}\subset\{|X_n-X|\geq\varepsilon_1\},$$

所以当$n>N$时有

$$P\{|g(X_n)-g(X)|\geq\varepsilon\}$$

$$\leq P\{|X|\geq 2M\}\cup\{|X_n|\geq 2M\}+P\{|X|<2M,\ |X_n|\geq 2M,\ |g(X_n)-g(X)|\geq\varepsilon\}$$

$$\leq P\{|X|\geq M\}+P\{|X_n-X|\geq M\}+P\{|X_n-X|\geq\varepsilon_1\}$$

$$\leq\frac{1}{3}\delta+\frac{1}{3}\delta+\frac{1}{3}\delta=\delta,$$

$\therefore\quad g(X_n)\xrightarrow{P}g(X),\ (n\to\infty)$。

证法二：$P(\Omega)=1$是有限测度，在实变函数论中曾得到，这时$X_n\xrightarrow{P}X$的充要条件是，对$\{X_n\}$的任一子序列$\{X_{n_k}\}$，都能找到其的一子序列$\{X_{n_{k_\nu}}\}$几乎处处收敛于X。（上题也可以用此定理证）对序列$\{g(X_n)\}$的任一子序列$\{g(X_{n_k})\}$。因为$X_n\xrightarrow{P}X$，由充要条件得，对

$\{X_{n_k}\}$ 可找到其一子序列 $\{X_{n_{k_v}}\}$，使 $X_{n_{k_v}} \xrightarrow{a.s.} X$。由于 g 是 R^1 的连续函数，由此得 $g\{X_{n_{k_v}}\} \xrightarrow{a.s.} g(X)$。再由充要条件得 $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$。

24、**证**：由序列的单调下降性可得，当 $n\to\infty$ 时的极限存在，且 $\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n < \varepsilon\} \supset \{X_k < \varepsilon\}$，

由 $X_k \xrightarrow{P} 0$ 得 $$1 \ge P\{\lim_{n\to\infty} X_n < \varepsilon\} \ge \lim_{k\to\infty} P\{X_k < \varepsilon\} = 1,$$

再由 $X_n > 0$ 及 ε 的任意性得

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n > 0\} = 1，\text{即 } X_n \xrightarrow{a.s.} 0。$$

25、**解**：设事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 互不相容，$P(B_i) > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，而且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，由全概率公式得

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{i=1}^{n} P\{\xi < x | B_i\} P\{B_i\} = \sum_{i=1}^{n} F\left(x | B_i\right) P(B_i)。$$

所以有 $$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x d\, F(x) = \sum_{i=1}^{n} E\left(\xi | B_i\right) P(B_i)。$$

此式称为**全数学期望公式**。由此并利用独立性得

$$f_\eta(t) = E\left(e^{it\eta}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\exp\left(it\sum_{k=1}^{\mu} X_k\right) \middle| \mu = n\right] P\{\mu = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E \exp\left(it \sum_{k=1}^{n} X_k\right) p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t)\right) p_n。$$

26、**证**：因为 $f(t)$ 是非负定的，故对任何实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，恒有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\lambda_k \overline{\lambda_j} \ge 0。$$

（1） 令 $n = 1,\ t_1 = 0,\ \lambda_1 = 1$。由非负定性条件得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j} = f(0) \ge 0$。

（2） 令 $n = 2,\ t_1 = 0,\ t_2 = t$ 得

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j} = f(0-0)\lambda_1\overline{\lambda_1} + f(0-t)\lambda_1\overline{\lambda_2} + f(t-0)\lambda_2\overline{\lambda_1} + f(t-t)\lambda_2\overline{\lambda_2}$$

$$= f(0)\left(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2\right) + f(-t)\lambda_1\overline{\lambda_2} + f(t)\overline{\lambda_1}\lambda_2$$

所以 $f(-t)\lambda_1\overline{\lambda_2} + f(t)\overline{\lambda_1}\lambda_2$ 应该是实数。设

$$f(-t) = \alpha_1 + i\beta_1,\quad f(t) = \alpha_2 + i\beta_2,\quad \lambda_1\overline{\lambda_2} = \Upsilon + i\delta，\quad \overline{\lambda_1}\lambda_2 = \Upsilon - i\delta，$$

代入上式并设虚部为 0 得

$$(\alpha_1-\alpha_2)\delta+(\beta_1+\beta_2)\gamma=0\text{。}$$

由γ,δ的任意性得 $\alpha_1-\alpha_2=0,\quad \beta_1+\beta_2=0$，即 $f(-t)=\overline{f(t)}$。

（3）在（2）中令$\lambda_1=f(t),\quad \lambda_2=-|f(t)|$，得

$$2f(0)|f(t)|^2-|f(t)|^2|f(t)|-|f(t)|^2|f(t)|\ge 0,$$

若$|f(t)|\ne 0$，则得$f(0)\ge|f(t)|$；若$|f(t)|=0$，则由（1）中结果得$f(0)\ge|f(t)|$。

27、**证**：即要证，若μ_n是次贝努里试验中事件出现和次数，$0<p<1$，则对任意有限区间$[a,b]$，当$n\to\infty$时一致地有$P\left\{a\le\dfrac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<b\right\}\to\int_a^b\varphi(x)dx$，其中$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^4}$。

因为μ_n服从二项分布$b(k;n,p)$，所以它的特征函数为$f_n(t)=(q+pe^{it})^n$，而$\dfrac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}$的特征函数为

$$g_n(t)=\left[q+p\exp\left(\frac{it}{\sqrt{npq}}\right)\right]^n\exp\left(-\frac{npit}{\sqrt{npq}}\right)=\left[q+p\exp\left(-\frac{pit}{\sqrt{npq}}\right)+p\exp\left(\frac{qit}{\sqrt{npq}}\right)\right]^n$$

按台劳公式展开e^z

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+o\left(z^2\right),$$

则得

$$p\exp\left(\frac{qit}{\sqrt{npq}}\right)=p+it\sqrt{\frac{pq}{n}}-\frac{qt^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\qquad q\exp\left(-\frac{pit}{\sqrt{npq}}\right)=q-it\sqrt{\frac{pq}{n}}-\frac{pt^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

代入$g_n(t)$得

$$g_n(t)=\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n\to e^{-\frac{1}{2}x^4}\qquad(n\to\infty)\text{。}$$

而$e^{-\frac{1}{2}x^4}$是标准正态分布$N(0,1)$的特征函数，由逆极限定理即可得要证的结论。

28、**解**：伯林德贝格 ——勒维定理，记$\bar{\xi}-m=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\zeta_n$，其中$\zeta_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{k=1}^n(\xi_k-m)$，则

$$P\{|\bar{\xi}-m|<0.1\sigma\}=P\left\{\left|\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\zeta_n\right|<0.1\sigma\right\}=P\{|\zeta_n|<0.1\sqrt{n}\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-0.1\sqrt{n}}^{0.1\sqrt{n}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$=\Phi\left(0.1\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-0.1\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(0.1\sqrt{n}\right)-1=0.95,$$

$\Phi\left(0.1\sqrt{n}\right)=0.975$，查表得 $0.1\sqrt{n}=1.96,\ n=385$。所以 n 至少应取 385。

29、证：ξ_k 的特征函数为 $f_{\xi_k}(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it}+1\right)=\cos\frac{t}{2}e^{\frac{1}{2}it}$ $(k=1,2,\cdots)$，所以 $\frac{\xi_k}{2_k}$ 的特征函数为

$\frac{\xi_k}{2_k}(t)=\cos\frac{t}{2^{k+1}}\exp\left(\frac{it}{2^{k+1}}\right)$.

η_n 的特征函数为

$$f_{\eta_n}(t)=\cos\frac{t}{2^2}\cdot\cos\frac{t}{2^3}\cdots\cos\frac{t}{2^{n+1}}\exp\left[it\left(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2^{n+1}}}\exp\left[\frac{it}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}f_{\eta_n}(t)=\frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}it}=\frac{1}{it}\left(e^{it}-1\right)=f(t)。$$

$f(t)$ 是[0,1]上均匀分布的特征函数，由逆极限定理得证。

30、证：二项分布的特邀函数为 $f_n(t)=(p_ne^{it}+q_n)^n=\left[1+\frac{np_n\left(e^{it}-1\right)}{n}\right]^n$。

若当 $n\to\infty$ 时 $np_n\to\lambda$，则 $np_n\left(e^{it}-1\right)\to\lambda\left(e^{it}-1\right)\ (n\to\infty)$。

所以 $\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]=f(t)$。

$f(t)$ 是普阿松分布 $p(\lambda)$ 的特邀函数，由逆极限定理得证。

31、证：设 ξ_λ 服从参数为 λ 的普阿松分布，则 $f_{\xi_\lambda}(t)=\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$。令 $\eta_\lambda=\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$，并

在下式中按台劳公式展开 e^{iz} 得

$$f_{\eta_\lambda}(t)=e^{-i\sqrt{\lambda}t}f_{\xi_\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)=\exp\left[-i\sqrt{\lambda}t+\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)\right]=\exp\left[-i\sqrt{\lambda}t+\lambda-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]$$

$$=\exp\left[-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]\to e^{-\frac{1}{2}t^2}\qquad(\lambda\to\infty)。$$

由逆极限定理得，普阿松分布当 $\lambda\to\infty$ 时，渐近正态分布。

32、证：由辛钦大数定律知，这时只要验证 EX_i 存在，$EX_i=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}2^{k-2\ln k}=\sum_{k=1}^{\infty}4^{-\ln k}$。而

$$4^{-\ln k}=e^{-\ln 4\ln k}=(e^{\ln k})^{-\ln 4}=k^{-\ln 4},$$

又 $\ln 4>1$，所以 $EX_i=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\ln 4}<\infty$，从而大数定律成立。

33、证：（1）的证明。
$$W_n=\frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}}=\frac{\xi_n}{\eta_n},$$

其中设 $\xi_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}$，$\eta_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$。由 $X_i\sim N(0,1)$ 可得 $\xi_n\sim N(0,1)$。又 X_i 间独立，所以 X_i^2 间也独立，对 $\{X_i^2\}$ 应用辛钦大数定律得 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}EX_i^2=1$。由本章第 25 题（2）中结论知 W_n 渐近 $N(0,1)$ $(n\to\infty)$。

（2）的证明。
$$U_n=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}}}=\frac{\xi_n}{\sqrt{\eta_n}},$$

ξ_n 和 η_n 同（1）中设。由 $\eta_n\xrightarrow{P}1$ 及本章第 27 题结论得 $\sqrt{\eta_n}\xrightarrow{P}1$。与（1）同理得 U_n 渐近 $N(0,1)$ $(n\to\infty)$。

34、证：取对数得
$$\ln Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i。$$

因为 X_i 独立同分布，所以 $\ln X_i$ 也独立同分布。又
$$E\ln X_i=\int_0^1\ln x\cdot 1\cdot dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1。$$

由辛钦大数定律得 $\ln Z_n\xrightarrow{P}-1$，即有 $Z_n\xrightarrow{P}e^{-1}=c$ $(n\to\infty)$。

35、证：因为 X_i 独立同分布且 $EX_i=m$，所以由于柯尔莫哥洛夫定理（独立同分布场合的强大数定律）

得
$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{a.s.}E(X_i)=m\ (n\to\infty)。$$

又 $|F(x)|\le k,\ \ P(\Omega)=1$ 有限，由控制收敛定理和 $f(x)$ 的连续性得

$$\lim_{n\to\infty}E\left[f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right]=E\left[\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right]$$

$$=E\left[f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right]=f(m)$$

36、证：记 $EX_i=a,\ DX_i=\sigma^2<\infty$，则

$$E\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\right)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iEX_i=a\cdot\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i=a,$$

$$D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\right)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\sigma^2$$

$$=\sigma^2\cdot\frac{4}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)}\to 0\quad(n\to\infty)。$$

其中利用 X_i 间的独立性。由马尔可夫大数定律得

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\xrightarrow{P}a=EX_i$$

37、证：利用伯恩其坦多项式 $B_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m(1-x)^{n-m}f\left(\frac{m}{n}\right)$。

显然 $B_n(0)=f(0),B_n(1)=f(1)$，故只要考虑 $(0,1)$ 中的 x。任取一贝努里试验 $E=E\infty$，使事件 A 在每次试验 E 中出现的概率恰为 x，x 任意固定；并以 η_n 表前 n 次试验中 A 出现的总次数，则由全数学期望公式得

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m(1-x)^{n-m}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right]=E\left[f(x)-f\left(\frac{\eta_n}{n}\right)\right]$$

$$=P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-x\right|<\delta\right\}\times E\left\{\left[f(x)-f\left(\frac{\eta_n}{n}\right)\right]\left|\frac{\eta_n}{n}-x\right|<\delta\right\}$$

$$=P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-x\right|\ge\delta\right\}\times E\left\{\left[f(x)-f\left(\frac{\eta_n}{n}\right)\right]\left|\frac{\eta_n}{n}-x\right|\ge\delta\right\}。\qquad(1)$$

其中 $\delta>0$ 为如下选定的数：由 $f(x)$ 的连续性，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当

$|x-y|<\delta,\ 0\le x,\ \ y\le 1$ 时有 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}\varepsilon$

（2）

令 $M=\sup\limits_{1\ge x\ge 0}|f(x)|$，由（1），（2）得

$$|f(x)-B_n(x)|\le 1\cdot\frac{\varepsilon}{2}+P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-x\right|\ge\delta\right\}\cdot 2M \tag{3}$$

由贝努里大数定律得 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-x\right|\ge\delta\right\}=0$，从而得证

$$\lim_{n\to\infty}B_n(x)=f(x),\ (0\le x\le 1)\text{。}$$

为证上式中收敛的一致性，利用车贝晓夫不等式

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-x\right|\ge\delta\right\}\le\frac{D\eta_n}{n^2\sigma^2}=\frac{nx(1-x)}{n^2\sigma^2}<\frac{1}{n\delta^2},$$

故当 $n>\dfrac{4M}{(\varepsilon\delta^2)}$ 时，由上式及（3）立得 $\sup\limits_{1\ge x\ge 0}|f(x)-B_n(x)|<\varepsilon$.

38、证：**充分性**。对任意 $\varepsilon>0$，记 $A_n=\{|X_n|\ge\varepsilon\}$，则题设变成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$。由波雷尔——康特立引理（i）知有

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(|X_k|\ge\varepsilon)\right\}=0 \tag{1}$$

而这正是 $\{X_u(\omega)\}$ 以概率 1 收敛于 $X(\omega)$ 的等价表示，所以 $X_n\xrightarrow{a.s.}0$。

必要性。由波雷尔——康特立引理（ii）及 $\{X_n\}$ 的独立性得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X_n|\ge\varepsilon\}=\infty \tag{2}$$

成立的充要条件是，

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(|X_k|\ge\varepsilon)\right\}=1 \tag{3}$$

而 $X_n\xrightarrow{a.s.}0$ 的等价表示为，对任意 $\varepsilon>0$（1）式成立。（1）与（3）是矛盾的，这说明若 $X_n\xrightarrow{a.s.}0$，则不能有（2）式成立，所以应有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{|X_n|\ge\varepsilon\}<\infty$。

39、证：由题设知，随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，$EX_n=a,\ E(X_n-a)^4=c_4<\infty$，所以 $DX_n=\sigma^2<\infty$。由马尔可夫不等式得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^4}E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_n-a)\right]^4$$

$$=\frac{1}{n^4\varepsilon^4}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^4\right]+C_2^4E\left[\sum_{i\neq j}^{n}(X_i-a)^2(x_j-a)\right]^4\right\}$$

$$=\frac{1}{n^4\varepsilon^4}\left[nc_4+6\frac{n(n-1)}{2}\sigma^4\right]\le\frac{1+3\sigma^4}{n^2\varepsilon^4}.$$

其中用到，由独立性得$(X_i-a)(x_j-a)^2=0\ (i\neq j)$；最后一步成立，是由于当$n$很大时有$c_4<n$。因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3\sigma^4}{n^2\varepsilon^4}<\infty$ $\quad\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|\ge\varepsilon\right\}<\infty$.

由此利用由波雷尔——康特立引理可得

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0,$$

所以，强大数定律成立。

由于$\{X_n\}$独立同分布，且由$c_4<\infty$可得$\sigma^2<\infty$，所以若改用柯尔莫洛夫强大数定律可立得结论。

40、**解**：设$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，且$P(A_n)=\frac{1}{n}$，则

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right\}=P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right\}=P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right\}=P\left\{\lim_{n\to\infty}A_n\right\}=\lim_{n\to\infty}P(A_n)=\lim\frac{1}{n}=0$$

引理(i)中另一结论是等价性结论，所以也成立。但条件不成立，事实上有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=<\infty$$

故引理(i)之逆不真。

41、**证**：设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DX_k}{k^2}<\infty$成立，则对任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n\ge N$时有$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{DX_k}{k^2}<\varepsilon$，

$$0\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}DX_k=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}DX_k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n}DX_k$$

$$\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N}DX_k+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{DX_k}{k^2}\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N}DX_k+\varepsilon\text{。}$$

对固定的N，当n充分大时，上式右端第一项可小于ε，

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}DX_k=0\text{。}$$

42、**证**：（1）$p_m=P\left\{\max|S_n|>2^m\varepsilon,\ 2^m\le n<2^{m+1}\right\}$

$$\le P\left\{\max_{2^{m+1}>n\ge1}|S_n|\ge2^m\varepsilon\right\}\le\frac{1}{(2^m\varepsilon)^2}\sum_{j=1}^{2^{m+1}-1}D\xi_j.$$

其中后一步由柯尔莫哥洛夫不等式得来。

（2）$0\le\sum_{m=1}^{\infty}p_m\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=1}^{2^{m+1}-1}D\xi_j=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}D\xi_j\sum_{m=m(j)}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}$.

其中后一步由交换求和次序得来，求和下限 $m(j)$ 表示满足 $2^{m+1}>j$ 的最小正整数 m。由 $2^{m(j)+1}>j$ 得 $2^{m(j)+2}>j^2$，从而 $\frac{1}{2^{2m(j)}}<\frac{4}{j^2}$。由此得

$$\sum_{m=1}^{\infty}p_m\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}D\xi_j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2(m(j)+k)}}=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D\xi_j}{2^{2m(j)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}D\xi_j\cdot\frac{4}{j^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D\xi_j}{j^2}$$

由此可得，若 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\xi_k}{k^2}<\infty$，则 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m$ 收敛。

（3）设 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\xi_k}{k^2}<\infty$，则由（2）中结论可得

$$\sum_{m=0}^{\infty}P\left\{\max_{2^{m+1}>n\ge2^m}|\eta_n|\ge\varepsilon\right\}=P\{|\eta_1|\ge\varepsilon\}+\sum_{m=1}^{\infty}p_m<\infty,$$

再由上题的结论即得 $P\{\eta_n\to0\}=0$，即柯尔莫哥洛夫大数定律成立：

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)\to0\right\}=1。$$

43、证：（1）设 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ 收敛，则，是柯西判别准则知，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n_0，使 $\left|c_{n_0+1}+\cdots+c_{n_0+k}\right|<\varepsilon$，此即 $\left|s_{n_0+k}-s_{n_0}\right|<\varepsilon$，对一切 $k=1,2,\cdots$ 成立，由此可得 $0\le b\le b_k\le\varepsilon$，由 $b=0$ 知对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n_i，使 $b_{n_i}<\varepsilon$，因而 $\left|s_{n_1+k}-s_{n_1}\right|<\varepsilon$ 对一切 $k=1,2,\cdots$ 成立，所以对任意 $m>n>n_i$，

$$|s_m-s_n|\le\left|s_m-s_{n_1}\right|+\left|s_n-s_{n_1}\right|<2\varepsilon,$$

仍由柯西准则知 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ 收敛。

（2）先证若 $\{c_k\}$ 为常数列，$\lim_{n\to\infty}c_k=c$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k=c$。事实上，对 $n>n_0$ 有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k-c\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(c_k-c)\right|\le\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}(c_k-c)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}(c_k-c)\right|$$

对任意$\varepsilon>0$，选n_0使当$k>n_0$时，有$|c_k-c|<\frac{1}{2}\varepsilon$，于是上式右方第二项对任意$n>n_0$总小于$\frac{n-n_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$；右方第一项当$n$充分大后也小于$\frac{1}{2}\varepsilon$。

现证 Kronecker 引理。令　$s_0=0,\ s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{k},\ \ t_n=\sum_{k=1}^{n}c_k,\ \ n=1,2,\cdots$，

则$c_k=k(s_k-s_{k-1}),\ k=1,2,\cdots$，故

$$t_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}ks_k-\sum_{k=1}^{n+1}ks_{k-1}=-\sum_{k=1}^{n}s_k+(n+1)s_{n+1},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\frac{t_{n+1}}{n+1}=-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k+s_{n+1}.$$

因$\{s_n\}$收敛于有穷极限，由上段所证知$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k\right\}$也收敛于同一极限，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k=\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{n+1}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k+\lim_{n\to\infty}s_{n+1}=0。$$

44、**证：充分性**。设$D(X_1+\cdots+X_n)=o(n^2)$，则由车贝晓夫不等式得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D(X_1+\cdots+X_n)}{\varepsilon^2n^2}\to0\qquad(n\to\infty)$$

所以大数定律成立。

必要性。设对$\{X_n\}$成立中心极限定理，即对任意$\varepsilon>0$有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\right|<a\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\tag{1}$$

又成立大数定律，即对任给$\varepsilon>0$有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\right|<\varepsilon\right\}=1。\tag{2}$$

而

$$P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\frac{B_n}{n}\cdot\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\right|<\varepsilon\right\}$$

$$=P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\right|<\varepsilon\cdot\frac{n}{B_n}\right\},$$

由此利用（1），（2）两式可得，当 $n\to\infty$ 时应有 $\frac{\varepsilon n}{B_n}\to\infty$，即 $\frac{B_n}{n}\to 0$，从而 $D\left(X_1+\cdots+X_n\right)=o(n^2)$。

45、证：若记 $f(t)$ 为 X_i 的特征函数，则由题设知，它同样也是 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的特征函数，因当 $n=1$ 时它化成 X_i，所以

$$f(t)=E\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k t\right\}=E\left(\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{i\frac{X_k}{\sqrt{n}}t\right\}\right)=\left[f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n。\qquad（1）$$

此式对每个 n 均成立。把 $f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ 展成幂级数，注意到 $f^{(k)}(0)=i^k EX_j^k$。而 $EX_j=0$，$EX_j^2=DX_j-(EX_j)^2=1$，所以

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)=1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)。\qquad（2）$$

（2）代入（1）得

$$\left[f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n=\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n\to e^{-\frac{1}{2}t^2}\qquad(n\to\infty)。$$

由于对任意 n 均有 $f(t)=\left[f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$，所以 $f(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$，而 $X_i\sim N(0,1)$。

46、证：（**1**）由正态分布有再生性知，$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 对任意 n 服从 $N(0,1)$。所以中心极限定理成立。

（**2**）$B_n^2<\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$，$B_n^2\not\to\infty\ (n\to\infty)$，由费勒条件的等价条件知，$\{X_n\}$ 不满足费勒条件。

（**3**）由 $a_k=0,\ B_n\uparrow 1$，取 $\tau=1$ 得

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)\ge\int_{|x|>1}x^2DF_1(x)>0,$$

其中右端仅保留和式中第一项。由此知 $\{X_n\}$ 不满足林德贝格条件。

47、证：$B_n^2=\frac{1}{3}+\sum_{k=2}^{n}2^{k-1}=\frac{1}{3}+\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2^n-1\frac{2}{3}\to\infty$，但 $\frac{b_n^2}{B_n^2}=\frac{2^{n-1}}{2^n-1\frac{2}{3}}\to\frac{1}{2}\neq 0\ (n\to\infty)$，

所以费勒条件不满足。$\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的特征函数为

$$f(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t)=\frac{\sin t}{t}\exp\left\{-\frac{1}{2}(2^n-2)t^2\right\}。$$

由此得 $\eta_n=\dfrac{1}{\sqrt{2^n-1\frac{2}{3}}}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的特征函数为

$$g_n(t)=\sin\frac{t}{\sqrt{2^n-1\frac{2}{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2^n-1\frac{2}{3}}}{t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2^n-2)t^2}{2^n-1\frac{2}{3}}\right\}\to e^{-\frac{1}{2}t^2}\quad(n\to\infty),$$

由逆极限定理知 $\eta_n \xrightarrow{L} N(0,1)$，所以中心极限定理成立。

48、证：（**1**）设 $0\le x\le 1$，则 $y=x(1-x)=x-x^2$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极大值 $\frac{1}{4}$，置 $x=p_i$ 得 $p_iq_i\le\frac{1}{4}$。

利用独立性得 $D_{\nu_n}=\sum_{i=1}^{n} p_iq_i\le\frac{1}{4}n$，再由车贝晓夫不等式得

$$P\left\{\left|\frac{\nu_n-E\nu_n}{n}\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{D_{\nu_n}}{n^2}\le\frac{1}{4\varepsilon^2 n}\to 0,$$

$$\therefore\quad \frac{\nu_n-E\nu_n}{n}\xrightarrow{P}0\ (n\to\infty)。$$

（**2**）记 $\nu_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，这里 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次成功\\ 0, & 第i次失败\end{cases}$，$P\{X_i=1\}=p_i$，$P\{X_i=0\}=q_i$。

充分性。设 $B_n=D_{\nu_n}=\sum_{i=1}^{n} p_iq_i\to\infty$，由于 X_i 仅取 $0,1$ 两值，则 $P\{|X_i-p_i|\ge 2\}=0$。由于 $B_n\to\infty$，故对任意 $\tau>0$ 存在 N，使当 $n>N$ 时，即 $\tau B_n\ge 2$，所以 $P\{|X_i-p_i|\ge\tau B_n\}=0$，从而当 $n>N$ 时

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x_i-p_i|\ge\tau B_n}(x-p_i)^2\,dF_i(x)$$

$$=\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{|x_i-p_i|\ge\tau B_n}(x-p_i)^2\,dF_i(x)\le\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}p_iq_i\le\frac{N}{4B_n^2}\to 0\ (n\to\infty)$$

即林德贝格条件成立。所以对 $\left(\nu_n-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i}$ 中心极限定理成立。

必要性。设 $\sum_{i=1}^{n} p_i q_i < \infty$，记 $r_i = \min(p_i, q_i)$，则 $p_i q_i = r_i(1-r_i) \ge \frac{1}{2} r_i$，所以 $\sum_{i=1}^{\infty} r_i \le \sum_{i=1}^{\infty} 2 p_i q_i < \infty$。

由此得 $\exp\left\{-\sum_{i=1}^{\infty} r_i\right\} > 0$，即 $\prod_{i=1}^{\infty} \exp\{-r_i\} > 0$。又 $\exp\{-r_i\} < 1 - r$，所以

$$c = \prod_{i=1}^{\infty}(1-r_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp\{-r_i\} > 0。$$

以 $i_1 < i_2 < \cdots$ 记一切满足条件 $p_i \ge \frac{1}{2}$ 的 i 所构成的子序列，记 $Z_n = \left(\nu_n - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i p_i}$，以 m_n 记 $i_1, i_2, \cdots$ 中不超过 n 的个数，则有 $P\{\nu_n = m_n\} \ge P\{X_j = 1, j = i_1, \cdots, i_{m_n}; X_j = 0$，对其它的 $j \le n\} = \prod_{i=1}^{\infty}(1-r_i) \ge c > 0$。

于是若记 $d_n = \left(m_n - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}$，则对一切 n 有 $P\{Z_n = d_n\} \ge c$ 成立。由于 $c > 0$ 与 n 无关，所以 Z_n 不能依分布收敛到 $N(0,1)$，中心极限定理不成立。

49、解： 中心极限定理成立，因为这时可以直接证得林德贝格条件成立。

$$a_k = EX_k = 0,\ DX_k = \frac{1}{3}k^2, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{18} n(n+1)(2n+1)。$$

对任意 $\tau > 0$，有

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}(x-a_k)^2 dF_k(x) \le \frac{1}{B_n^2 \cdot \tau B_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}|x| x^2 f_k(x)dx$$

$$\le \frac{1}{\tau B_n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{-k}^{k}|x|^3 \cdot \frac{1}{2k}dx = \frac{1}{4\tau B_n^3}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \frac{1}{4\tau} \cdot \frac{\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2}{\left[\frac{1}{18} n(n+1)(2n+1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{18^{\frac{3}{2}}}{16\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

所以林德贝格条件成立。

50、解：（**1**）$EX_k=0,\ DX_k=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{k}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}\right)^2=k,\quad B_n^2=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。取$\delta=1$，则

$$\frac{1}{B_n^{2+1}}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k-0|^{2+1}=\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}\le\frac{n\cdot n^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}\to 0\quad(n\to\infty)。$$

所以李雅普诺夫定理成立。

（**2**）$EX_k=0,\ DX_k=\frac{2}{3}k^{2\alpha}$，可得

$$B_n^2=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}\ge\frac{2}{3}\int_1^n(x-1)^{2\alpha}dx=\frac{2}{3(2\alpha+1)}(x-1)^{2\alpha+1}\Big|_1^n$$

$$=\frac{2}{3(2\alpha+1)}(n-1)^{2\alpha+1}=c(n-1)^{2\alpha+1},$$

由$\alpha>0$得常数$c>0$，取$\delta=1$得

$$\frac{1}{B_n^{2+1}}\sum_{k=1}^{n}E|X_k-0|^{2+1}=\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}k^{3\alpha}\le\frac{2}{3B_n^3}\int_1^n x^{3\alpha}dx$$

$$\le\frac{2}{3\sqrt{c^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n-1)^{3(2\alpha+1)}}}\left(\frac{1}{3\alpha+1}n^{3\alpha+1}-\frac{1}{3\alpha+1}\right)$$

$$\le\frac{2}{3(3\alpha+1)\sqrt{c^3}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3\alpha+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}\to 0\quad(n\to\infty)。$$

所以李雅普诺夫定理成立。

51、证：设独立随机变量序列$\{\xi_n\}$有相同的普阿松分布，且参数为$\lambda=1$，由于普阿松分布再生性，所以$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$是服从参数$\lambda=n$的普阿松分布，

$$P\{\eta_n=i\}=\frac{n^i}{i!}e^{-n}\ (i=0,1,2,\cdots),\ E\eta_n=D\eta_n=n。$$

由于$\{\xi_n\}$独立同分布且方差有限，由林德贝格——勒维定理知中心极限定理成立，所以

$$P\left\{\frac{(\eta_n-n)}{\sqrt{n}}\le 0\right\}=P\{\eta_n\le n\}=e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{1}{2}。$$

52、解：由假设：$\qquad P(X=k)=C_{6000}^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(1-\frac{1}{6}\right)^{6000-k}\qquad k=0,1,2,\cdots,6000$

$\therefore EX=1000, DX=\dfrac{5000}{6}$ ，而契比雪夫不等式 $P(|\xi-E\xi|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$

由契比雪夫不等式得：$P\left(\left|\dfrac{X}{6000}-\dfrac{1}{6}\right|<1\%\right)\geq 1-\dfrac{DX/6000^2}{(0.01)^2}=1-\dfrac{5000}{6\times6000^2\times(0.01)^2}$

53、解：设第 i 个钉子重量为 $\xi_i.(i=1,2,\cdots,100)$，则 ξ_i 相互独立。$E\xi_i=1$（两），$\sigma_i=\sqrt{D\xi_i}=0.1$ (两)。

总重量 $\xi=\sum_{i=1}^{100}\xi_i$

$\therefore P(\xi>102)=P\{\dfrac{\xi-100\times1}{\sqrt{100}\times0.1}>\dfrac{102-100\times1}{\sqrt{100}\times0.1}\}=1-P(\xi-100<2)=1-\Phi_0(2)=0.02275$

54、解：设第 i 页的印刷错误个数为 $X_i(i=1,2,\cdots,300)$，则 $E(X_i)=0.2,\quad D(X_i)=0.2$,且 X_i 相互独立，故所求概率为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{300}X_i\leq70\right\}\approx1-\Phi\left(\frac{70-60}{\sqrt{300\times0.2}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=\Phi(1.29)=0.9015$$

55、解：车床工作的概率为 0.8，车床台数为 $n=100$ 。设实际工作台数为 m，由棣莫费——拉普拉斯中心极限定理，所求概率为

$$P\{70\leq m\leq86\}\approx\Phi\left(\frac{86-100\times0.8}{\sqrt{100\times0.8\times0.2}}\right)-\Phi\left(\frac{70-100\times0.8}{\sqrt{100\times0.8\times0.2}}\right)$$

$$=\Phi(1.5)-\Phi(-2.5)=\Phi(1.5)-(1-\Phi(2.5))=0.9332-(1-0.9938)=0.927$$

56、解：贝努力大数定律是: 设 Un 是 n 重独立贝努力试验中事件 A 出现的次数，又 A 在每次 试验中出现的概率为 $P(0<p<1)$ 则 $\forall\varepsilon>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\dfrac{U_n}{n}-p\right|<\varepsilon)=1$

证明：令 $\xi_i=\begin{cases}1 & 第i次试验中A出现\\ & 第i次试验中A不出现\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$

$\therefore \xi_1,\cdots\xi_n$ 相互独立,且 $E\xi_i=p, D\xi_i=pq$

而 $U_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\qquad \therefore\dfrac{u_n}{n}-p=\dfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i-E(\sum_{i=1}^{n}\xi_i))$

由切比雪夫不等式 $\forall\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\frac{u_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-E(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)\right|\geq n\varepsilon\right)\leq\frac{D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{n^2\varepsilon^2}\to 0(n\to\infty)$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{u_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

57、证： $\because E\xi_k=0\qquad D\xi_k=\ln(1+k)\qquad k=1,2,\cdots,n$ 又 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立，

$$\therefore\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

且 $D(\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}\xi_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+i),\ \forall\varepsilon>0$ 由切比雪夫不等式

$$\therefore p\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{\varepsilon^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1+i)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}p(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi|\geq\varepsilon)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n\varepsilon}=0$$

$\therefore\{\xi_n\}$ 服从大数定律　　　　　证毕

58、证: 因 $D\xi_n=\sqrt{n},(n=1,2,3,\cdots)$ ，故

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}\leq\frac{n\sqrt{n}}{n^2}\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{}0$$

即马尔可夫条件成立，故 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律。

59、证： $P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}=P\{\mu-\varepsilon<\bar{X}<\mu+\varepsilon\}\approx\Phi\left(\frac{\mu+\varepsilon-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\varepsilon-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)\right]=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-1$$

60、证：令 $Y_i=X_i^2,i=1,2,\cdots,n,\cdots$ 。因 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，故 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 独立同分布。

对 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 应用独立同分布序列中心极限定理，有

$$E(Y_i)=E(X_i^2)=\gamma_2,\quad i=1,2,\cdots$$

$$D(Y_i)=D(X_i^2)=E(X_i^4)-(E(X_i^2))=\gamma_4-\gamma_2^2$$

从而当n充分大时，$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$近似服从正态分布 $N\left(\gamma_2,\frac{\gamma_4-\gamma_2^2}{n}\right)$。

61、证：由$\xi_1>0$知$\frac{\xi_1(\omega)+\cdots\xi_k(\omega)}{\xi_1(\omega)+\cdots\xi_n(\omega)}$分母不为0，它是有限可测函数，即是随机变量，利用独立同分布可得

$$E\left(\frac{\xi_1+\cdots\xi_k}{\xi_1+\cdots\xi_n}\right)=\int\cdots\int\frac{x_1+\cdots x_k}{x_1+\cdots x_n}\times f(x_1)\cdots f(x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=k\int\cdots\int\frac{x_1}{x_1+\cdots+x_n}f(x_1)\cdots f(x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\frac{k}{n}\int\cdots\int\frac{x_1+\cdots+x_n}{x_1+\cdots+x_n}f(x_1)\cdots f(x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\frac{k}{n}.$$

62、证：$E\xi_k=0$，$D\xi_k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\ln k}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\ln k}\right)^2=\sqrt{\ln k}$，

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln k\le\frac{n\ln n}{n^2}=\frac{\ln n}{n}\to0\ (n\to\infty)。$$

满足马尔可夫条件，故题中结论成立。

63、证：（1）$EX_k=0$，$DX_k=\left(2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(-2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2}=4k$，

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}DX_k=\frac{1}{n^2}\times\frac{4-4^{n+1}}{1-4}=\frac{4^{n+1}}{3n^2}-\frac{4}{3n^2}\to0\ (n\to\infty)。$$

不满足马尔可夫条件。

（2）$EX_k=0,\quad DX_k=\left(2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}+\left(-2^k\right)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=1$，

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}\to0\ (n\to\infty)。$$

满足马尔可夫条件。

（3）$EX_k=0,\quad DX_k=k^2\cdot\frac{1}{2k^{\frac{1}{2}}}+\left(-k\right)^2\cdot\frac{1}{2k^{\frac{1}{2}}}=k^{\frac{3}{2}}$，

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}\ge\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)。$$

不满足马尔可夫条件。

64、证：利用德莫哇佛 ——拉普拉斯积分定理得

$$P\{|\mu_n - np| < k\} = P\left\{\frac{|\mu_n - np|}{\sqrt{npq}} < \frac{k}{\sqrt{npq}}\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-k}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

在如上积分中，积分区间长度 $\frac{2k}{\sqrt{npq}} \to 0$，所以 $P\{|\mu_n - np| < k\} \to 0 \ (n \to \infty)$。

65、证：$F_n(x) = P\{X_n, x\} = \begin{cases} 0, & 当 x \le 0 \\ 1-\frac{1}{n}, & 当 0 < x \le n \\ 1, & 当 x < n \end{cases}$。 令 $n \to \infty$ 得 $F_n(x) \to F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$。

这说明分布函数收敛，但 $EX_n = 1,\ EX = 0,\ EX_{n^+} \to EX (n \to \infty)$。当 $k > 1$ 时，

$$EX_n^k = n^k \cdot \frac{1}{n} = n^{k-1},$$

$$E(X_n - EX_n)^k = E(X_n - 1)^k = (-1)^k\left(1-\frac{1}{n}\right) + (n-1)^k \cdot \frac{1}{n}$$

所以当 $n \to \infty$ 时，$EX_n \to \infty$，$E(X_n - EX_n)^k \to \infty$。由此知其中心距，原点矩均不收敛。

66、证法一：对任给 $\delta > 0$，取 $M > 0$ 及 N_1，使当 $n > N_1$ 时有

$$P\{|X| \ge M\} < \frac{1}{3}\delta, \quad P\{|X_n - Y| \ge M\} < \frac{1}{3}\delta。$$

$g(x)$ 在 $[-2M, 2M]$ 上一致连续，则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\varepsilon_1 > 0$，使当 $x_1, x_2 \in [-2M, 2M]$ 且 $|x_1 - x_2| < \varepsilon_1$ 时有 $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$。

再取 $N \ge N_1$，使当 $n > N$ 时有 $P\{|X_n - X| \ge \varepsilon_1\} < \frac{1}{3}\delta$。

由于 $\{|X| \ge 2M\} \cup \{|X_n| \ge 2M\} \subset \{|X| \ge M\} \cup \{|X| \le M, |X_n| \ge 2M\}$

$$\subset \{|X| > M\} \cup \{|X_n - X| \ge M\},$$

$$\{|X| \le 2M,\ |X_n| \le 2M,\ |g(X_n) - g(X)| \ge \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| \ge \varepsilon_1\},$$

所以当 $n > N$ 时有

$$P\{|g(X_n) - g(X)| \ge \varepsilon\}$$

$$\le P\{|X| \ge 2M\} \cup \{|X_n| \ge 2M\} + P\{|X| < 2M,\ |X_n| \ge 2M,\ |g(X_n) - g(X)| \ge \varepsilon\}$$

$$\le P\{|X| \ge M\} + P\{|X_n - X| \ge M\} + P\{|X_n - X| \ge \varepsilon_1\}$$

$$\le \frac{1}{3}\delta+\frac{1}{3}\delta+\frac{1}{3}\delta=\delta,$$

$\therefore \quad g(X_n)\xrightarrow{P} g(X),\ (n\to\infty)$。

证法二：$P(\Omega)=1$是有限测度，在实变函数论中曾得到，这时$X_n\xrightarrow{P}X$的充要条件是，对$\{X_n\}$的任一子序列$\{X_{n_k}\}$，都能找到其的一子序列$\{X_{n_{k_v}}\}$几乎处处收敛于X。（上题也可以用此定理证）对序列$\{g(X_n)\}$的任一子序列$\{g(X_{n_k})\}$。因为$X_n\xrightarrow{P}X$，由充要条件得，对$\{X_{n_k}\}$可找到其一子序列$\{X_{n_{k_v}}\}$，使$X_{n_{k_v}}\xrightarrow{a\cdot s\cdot}X$。由于$g$是$R^1$的连续函数，由此得$g\{X_{n_{k_v}}\}\xrightarrow{a\cdot s\cdot}g(X)$。再由充要条件得$g(X_n)\xrightarrow{P}g(X)$。

67、证：由序列的单调下降性可得，当$n\to\infty$时的极限存在，且 $\{\lim\limits_{n\to\infty}X_n<\varepsilon\}\supset\{X_k<\varepsilon\}$，

由$X_k\xrightarrow{P}0$得 $\quad 1\ge P\{\lim\limits_{n\to\infty}X_n<\varepsilon\}\ge\lim\limits_{k\to\infty}P\{X_k<\varepsilon\}=1$，

再由$X_n>0$及ε的任意性得

$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n>0\}=1，\text{即 } X_n\xrightarrow{a\cdot s\cdot}0。$$

68、证：ξ_k的特征函数为 $\quad f_{\xi_k}(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it}+1\right)=\cos\frac{t}{2}e^{\frac{1}{2}it}\quad(k=1,2,\cdots)$，

所以$\dfrac{\xi_k}{2_k}$的特征函数为 $\quad f_{\frac{\xi_k}{2_k}}(t)=\cos\dfrac{t}{2^{k+1}}\exp\left(\dfrac{it}{2^{k+1}}\right)$

η_n的特征函数为

$$f_{\eta_n}(t)=\cos\frac{t}{2^2}\cdot\cos\frac{t}{2^3}\cdots\cos\frac{t}{2^{n+1}}\exp\left[it\left(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2^{n+1}}}\exp\left[\frac{it}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}f_{\eta_n}(t)=\frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}it}=\frac{1}{it}\left(e^{it}-1\right)=f(t)。$$

$f(t)$是[0,1]上均匀分布的特征函数，由逆极限定理得证。

69、证：二项分布的特邀函数为 $\quad f_n(t)=(p_ne^{it}+q_n)^n=\left[1+\dfrac{np_n\left(e^{it}-1\right)}{n}\right]^n$。

若当 $n\to\infty$ 时 $np_n\to\lambda$，则 $np_n\left(e^{it}-1\right)\to\lambda\left(e^{it}-1\right)\quad(n\to\infty)$。

所以 $$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]=f(t)。$$

$f(t)$ 是普阿松分布 $p(\lambda)$ 的特邀函数，由逆极限定理得证。

70、证：设 ξ_λ 服从参数为 λ 的普阿松分布，则 $f_{\xi_\lambda}(t)=\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$。

令 $\eta_\lambda=\dfrac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$，并在下式中按台劳公式展开 e^{iz} 得

$$f_{\eta_\lambda}(t)=e^{-i\sqrt{\lambda}t}f_{\xi_\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)=\exp\left[-i\sqrt{\lambda}t+\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)\right]=\exp\left[-i\sqrt{\lambda}t+\lambda-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]$$

$$=\exp\left[-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]\to e^{-\frac{1}{2}t^2}\qquad(\lambda\to\infty)。$$

由逆极限定理得，普阿松分布当 $\lambda\to\infty$ 时，渐近正态分布。

71、证：取对数得 $\ln Z_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$。因为 X_i 独立同分布，所以 $\ln X_i$ 也独立同分布。又

$$E\ln X_i=\int_0^1\ln x\cdot 1\cdot dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1。$$

由辛钦大数定律得 $\ln Z_n\xrightarrow{P}-1$，即有 $Z_n\xrightarrow{P}e^{-1}=c\ (n\to\infty)$。

72、证：记 $EX_i=a,\ DX_i=\sigma^2<\infty$，则

$$E\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\right)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iEX_i=a\cdot\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i=a,$$

$$D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\right)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\sigma^2$$

$$=\sigma^2\cdot\frac{4}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)}\to 0\quad(n\to\infty)。$$

其中利用 X_i 间的独立性。由马尔可夫大数定律得

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\xrightarrow{P}a=EX_i$$

73、证：设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DX_k}{k^2}<\infty$ 成立，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n\geq N$ 时有 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{DX_k}{k^2}<\varepsilon$，

$$0 \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n} DX_k$$

$$\le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} DX_k + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{DX_k}{k^2} \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} DX_k + \varepsilon 。$$

对固定的N，当n充分大时，上式右端第一项可小于ε，

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}DX_k = 0 。$$

74、证：$B_n^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{n} 2^{k-1} = \frac{1}{3} + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n - 1\frac{2}{3} \to \infty$，但 $\frac{b_n^2}{B_n^2} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1\frac{2}{3}} \to \frac{1}{2} \ne 0 \ (n\to\infty)$，

所以费勒条件不满足。$\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的特征函数为

$$f(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t) = \frac{\sin t}{t}\exp\left\{-\frac{1}{2}(2^n - 2)t^2\right\}。$$

由此得$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{2^n - 1\frac{2}{3}}}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的特征函数为

$$g_n(t) = \sin\frac{t}{\sqrt{2^n - 1\frac{2}{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2^n - 1\frac{2}{3}}}{t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2^n-2)t^2}{2^n - 1\frac{2}{3}}\right\} \to e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (n\to\infty),$$

由逆极限定理知$\eta_n = \xrightarrow{L} N(0,1)$，所以中心极限定理成立。

75、证：设独立随机变量序列$\{\xi_n\}$有相同的普阿松分布，且参数为$\lambda = 1$，由于普阿松分布再生性，所以$\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 是服从参数$\lambda = n$的普阿松分布，

$$P\{\eta_n = i\} = \frac{n^i}{i!}e^{-n} \ (i = 0,1,2,\cdots),\ E\eta_n = D\eta_n = n。$$

由于$\{\xi_n\}$独立同分布且方差有限，由林德贝格——勒维定理知中心极限定理成立，所以

$$P\left\{\frac{(\eta_n - n)}{\sqrt{n}} \le 0\right\} = P\{\eta_n \le n\} = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \frac{1}{2}。$$